现代声学科学与技术丛书

非线性声学

（第二版）

钱祖文　著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-3632.0101)




ISBN 978-7-03-025157-2

销售分类建议：高等物理

定　价：78.00元

现代声学科学与技术丛书

非 线 性 声 学

（第二版）

钱祖文 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系统地介绍了无界和有界空间中有限振幅声波的传播，其中包括黎曼-厄恩肖非线性波理论、冲击波形成前的富比尼解、冲击波理论、非理想介质（包括频散介质）中的有限振幅波的传播理论、声散射声、声参量阵、声辐射力、声冲流、气泡的有限振幅振动、二阶和三阶非线性参数、水波孤子、声学混沌、分形学在声学中的应用、固体中的非线性声学。

本书讨论深入，反映当代最新发展，可供相关专业科研工作者、研究生及高年级本科生参考。

图书在版编目(CIP)数据

非线性声学 / 钱祖文著. –2版.—北京：科学出版社，2009

(现代声学科学与技术丛书)

ISBN 978-7-03-025157-2

I. 非… II. 钱… III. 非线性声学 IV. 0422.7

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第134404号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年8月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2009年8月第一次印刷 印张: 26 3/4

印数:1–2 000 字数: 519 000

定价：78.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

本书第一版的印刷量太小，书店很快就脱销，许多读者来函索书，但我手头存书有限，难以一一满足，爱莫能助。现在，“非线性”已经成为各门学科及其应用领域共同面临的问题。随着我国改革开放的大潮日趋汹涌，有关的科技工作者对这门学科的需求也是今非昔比，希望对这部分知识作较为深入的了解，从而跟踪和探索其新的应用领域。加之，近 20 年来，非线性声学也有了进一步的发展，因此，第一版的内容也需要作相应的更新。

本书在其第一版的基础上，作了适当的修改和补充，尽量改正了第一版中的笔误以及印刷错误。在第 2 章中补充了关于富比尼解的进一步研究，广义黎曼-厄恩肖解的讨论及其应用。第 11 章增加了欧拉体系中的辐射力及其应用。第 13 章中增加了气泡大振幅振动的 Q-X 方程及其应用部分。在第 14 章中增加了三阶非线性系数理论。在第 15 章中补充了二维孤波部分。在第 17 章中强调了积累解的重要性，在二阶势理论的基础上提出定解问题的方程组和求解步骤，具体讨论了各种波入射时的解答，并对非线性表面波作了较为深入的研究。近年来分形学在声学领域有了许多应用，故本书的第 18 章纳入了这部分内容。

本书得到中国科学院科学出版基金的资助，作者表示深切的感谢。

限于知识和精力，书中不免（特别是繁杂的具体计算）有不妥之处，还望不吝指正。

作　者
2009 年于中国科学院声学研究所

第一版前言

在 20 世纪 70 年代前期，国外先后出版了三部非线性声学专著，即 Зарембо 和 Красилъников 的《非线性声学引论》、Рудеико 和 Солуян 的《非线性声学原理》以及 Beyer 的《非线性声学讲义》，而作者之所以撰写此书是基于下述 4 点考虑：第一，这三本著作不包括近 20 年飞速发展的成就；第二，由于它们的作者兴趣不同，其内容各有侧重；第三，可能由于文字上或者别的什么原因，国外的著作很少反映我国的工作；第四，迄今为止，尚无一本非线性声学的中文书。

20 世纪 70 年代后期，作者在中国科学院声学研究所为有关同事讲授了非线性声学课程，当时的讲稿即为本书的雏形。1980 年，声学所所长汪德昭先生建议作者撰写这本书，并向现代物理学丛书编委会推荐而被列入出版计划。在写作过程中，作者得到了汪先生和魏荣爵先生的鼓励、关怀和指导，魏先生审阅了本书的早期初稿，提出不少有益意见。由于“讲课容易成书难”的弊病，作者总有点“足将进而踟蹰”，迟迟未能交稿，错过了大好时光。后来，出版经费日趋紧张，这份手稿也就被暂时束之高阁了。1990 年，马大猷先生再次鼓励作者出版此书，并向我院出版基金委员会鼎力推荐，得到了批准和资助，此书因而得以问世。作者在此对我的前辈师长们、和我作过有益讨论的同行们以及资助本书的院出版基金委员会表示由衷的感谢。

由于作者才疏学浅，差错和不妥在所难免，敬请批评指正。

作　者

1991 年于中国科学院声学研究所

目　录

绪　论

近年来非线性声学有了迅速发展，在学术上和实际应用中均很受重视。在研究声传播时，总离不开运动方程、连续性方程和物态方程。对于理想介质来说，运动方程是欧拉方程，即[1]

$$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p \tag{0.1}$$

式中，ρ 为介质密度，$\boldsymbol{v}$ 为流点的速度矢量，p 是声压，而

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \tag{0.2}$$

显然，上式右端第二项是非线性项，在流体力学中，称其为对流项，或者运动非线性项。

连续性方程可写为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{0.3}$$

式中，ρ 为流体的密度，上式第二项为非线性项。

物态方程为 $p = p(\rho)$，服从这种物态方程的流体称为正压流体，即压力仅是密度的函数。但在一般情况下，压力不仅是密度的函数，而且是熵 S 的函数。如果声传播过程是等熵的，则这种流体在这些意义下可以称为正压流体。将物态方程展为泰勒级数，于是有

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_S (\rho - \rho_0)^2 + \cdots \tag{0.4}$$

式中，ρ_0 和 P_0 分别为密度和压力的静态值，上式右端第三项开始即出现介质的非线性项。

在线性声学中，上述几个方程中的所有非线性项都被忽略。由此可见，运动非线性或者介质非线性不能都忽略的声学问题即属于非线性声学问题。

根据线性声学的概念可知，一列单频声波在线性介质中传播时，除了它的振幅衰减和相位变化之外，其波形并不发生变化。另外，如果运动非线性(如振幅足够大)或者介质非线性发生作用时，一列单频正弦波就会产生它的谐波、分频波、和频波以及差频波，由于这些波的出现，波的叠加原理不再成立，线性声学规律

不再遵守，从而必须代之以一门新的学科分支——非线性声学。

早在18世纪中叶，科学工作者就已经注意到许多非线性现象了[2]。1808年，泊桑提出了后来被称为简单波（或者后来称为黎曼[3](Riemann)-厄恩肖(Earnshaw)[4]解）的形式解。1860年黎曼和厄恩肖各自独立地发表了非线性一维波动方程的严格解，即黎曼-厄恩肖的简单波理论解(简称黎曼解)。众所周知，在线性声学中，声波传播可以用著名的达朗贝尔解来描述，而单频声波的传播速度被介质的特性唯一决定。而在非线性声学中，与达朗贝尔解相对应的为黎曼解，在这种情况下，声传播速度不仅取决于介质特性，而且还与质点振动幅度有关，质点振动速度的代数值大的地方波速大，代数值小的地方波速少。对于正弦扰动的传播而言，波峰传得最快，波谷传得最慢，故传播一段时间之后，波峰赶上波谷，将有可能形成锯齿波或者冲击波，因此，黎曼解对于冲击波的形成过程给出了一个清晰的图像。

1870年和1889年兰金(Rankine)和休戈尼奥特(Hugoniot)先后发表了冲击波波面两侧力学量的守恒关系式，后来称其为兰金-休戈尼奥特关系式[5,6]，对冲击波的传播特性有了进一步的了解。

尽管如此，由于条件所限，以前人们只能将非线性现象当作一类“有害成分”来处理，除了从学科意义上对它进行探索以外，在实用方面也仅仅是尽量不要产生它[7]。

当一列声波在非线性介质中传播时，它激励了介质运动使之成为非线性波源——分布型辐射源，它分布于传播路径上，从而使得非线性波存在“积累解”，它可表示为 kx 的 $n-1$ 阶多项式的形式，式中 k 和 x 分别为声波波数和距离。通常声波的吸收系数 $\alpha \ll k$，故当 αx 接近于1时，在这样的距离范围内，由于 $kx \gg 1$，积累解的贡献大大超过声吸收所引起的衰减，因而积累解是主要的贡献者。

到了20世纪50年代，莱特希尔[8](Lighthill)在空气动力声学方面取得了重要成就，在他的建议下，韦斯特维尔特(Westervelt)[9]提出了一种新型声源——声参量阵，它是一种分布型的源。由于它的指向性很尖锐，频带很宽，可以提高空间分辨率，抗混响，并可能获得较高的信号处理增益，它给非线性声学的应用带来光辉的前景。参量阵的缺点是效率低，但我们不妨认为，它的上述优点是以低效率为代价的。

参量阵也用于接收，称为参量接收器[10]。在讨论这种接收器的指向性时，允许两束声(泵波和信号波)传播方向不同。但根据声散射声的结论，在这种情况下并不存在参量声的源函数，故本书在讨论这个问题时，只是假设可以用源函数概念来处理。当然这并不表示作者同意此种观点[7, 11~14]。

在非线性声学领域中还存在若干有争议的问题，如声散射声[11~14]及辐射压力[15~17]等问题。这些问题产生的原因看来不仅有物理上，也许还有数学上的原因。

如果引入间断性的声场，则会出现虚假的声散射声。在对某些展开项进行不同取舍时，会得到不同的瑞利辐射压力等。因此，某些数学上的简化，在线性声学中可能是容许的，而在非线性声学中则不容许，因为后者处理的属于次级效应，这些不合理的简化会带来人为的源函数。

非线性声学主要采用逐步近似方法来处理问题，大部分内容仅限于二级近似。这样得到的方程总是将低阶波作为高阶波的源函数，而在线性声学中各阶波之间是独立的。可是在推导空化气泡振动方程时，除了个别作者以外，大部分工作都不采用逐步近似方法，而是引入一些简化假设，从而将定解问题适定的偏微方程组化归非线性的常微分方程。如果这些简化假定与原问题一致，则问题依然是适定的，否则将使问题成为超定的。

非线性边值问题也是一个有待发展的问题[7, 18, 19]。在线性边值问题中我们早已知道，各阶谐波的定解问题的陈述是相互不交叉的，而在非线性声学领域中，不仅在方程中各阶谐波是交叉的，而且在边界条件中亦然，这就给数学处理带来很大的不方便，有时甚至出现困难。

非线性参数 *B/A* 是描写介质非线性的一个特征量[20]，近年来某些作者主张将它用来作为超声成像的特征参数，对于超声诊断可能会增加一定的信息。

近年来，高声强聚焦超声（HIFU）已经成为医学超声的研究课题[21]，有关的医疗设备也已经应用于临床治疗，聚焦声的功率和声场的测量以及有关的换能器校准问题[22]、空化气泡群体带来的影响等已成为这方面的从业者关注的焦点。可是目前非线性声学有效处理具体问题的“能力”仅能达到二级近似，更为迫切的是人体组织的物理模型如何适应非线性问题的需要。

近代物理学中的孤子和混沌现象在声波和振动领域也陆续观察到[23]，这不仅会推动非线性声学的发展，而且使已和物理学分道扬镳多年的声学在这个方面将会“分久必合”。

限于篇幅，本书没有涉及随机非线性声学及非线性振动等方面的问题。

参 考 文 献

[1] Landau L D，Lifshitz E M. Fluid mechanics，course of theoretical physics. Vol. 6. New York：Pergamon Press, 1959

[2] Poisson S D. Memoir on the theory of sound. *In*: Beyer BT. Nonlinear acoustics in fluids. Brown University,Province,Rhode Island, VNR Comp，1984. 23~28

[3] Riemman B. The propagation of plane sound waves of finite amplitude. *In*:Beyer BT. Nonlinear acoustics in fluids. Brown University, Province，Rhode Island，VNR Comp，1984. 42~60

[4] Earnshaw S. On the mathematical theory of sound. Phil Trans Roy Soc, 1859，8: 75~102;

Benchmark paper in acoustics. *In*:Lindsay R B. acoustics: historical and philosophical development. Brown University, Dowden Hutchinson & Ross, Inc, 291

[5] Rankine WJM. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance. *In*: Beyer B T. Nonlinear acoustics in fluids. Brown University, VNR Comp，1984. 65~76

[6] Hugoniot H. Memoir on the propagation of motion in bodies, especially in a perfect gas. *In*: Beyer B T Nonlinear Acoustics in Fluids. Brown University, VNR Comp，1984. 77~89

[7] 钱祖文. 非线性声学概述. 物理, 1991, 20: 261~265

[8] Lighthill M J. On sound generated aerodynamically. Proc Roy Soc, 1952, A211: 564~587

[9] Westervelt P J. Parametric acoustic array. Jour Acoust Soc Am, 1963, 35: 535~537

[10] Berktay H O. Parametric amplification by the use of acoustic non-linearities and some possible applications, J Sound and Vib, 1965, 2: 462~270

[11] Westervelt P J. Scattering of sound by sound. Jour Acoust Soc Am, 1957, 29: 199~203

[12] Westervelt P J, Scattering of sound by sound., Jour Acoust Soc Am, 1957, 29: 934~935

[13] 钱祖文.关于声散射声. 物理学报，1976，25：472~480

[14] 钱祖文.平面波与平面行波脉冲的声相互作用. 物理学报，1988，37：221~228

[15] Baoteh C，Apfel R E. Acoustic radiation pressure produced by a beam of sound. Jour Acoust Soc Am, 1982, 72: 1673~1687

[16] Baoteh C，Apfel R E. Response to the comments of Nyborg and Rooney. J Acoust Soc Am, 1984, 75：283~264; Jour Acoust Soc Am, 1984, 75: 1003~1004

[17] Rooney J A，Nyborg W L. Acoustic radiation pressure in a traveling plane wave. Amer Jour Phys, 1972, 40: 1825~1830

[18] 钱祖文. 我国非线性声学方面的研究进展. 物理, 1999, 28: 593~600

[19] Blackstock D T. Amer. Institute of Physical Handbook. 3rd ed. McGraw-Hill Book Company，1972. 3~183

[20] Beyer R T. Nonlinear Acoustics. Department of the Navy，Sea System Command. 1974

[21] 钱祖文.高强度聚焦超声（HIFU）———一门多学科的研究课题. 物理, 2007, 36：701~707

[22] Qian Z W, Zhu Z, Ye S. Acoustic radiation force on objects and power measurements of focusing source (HIFU). Proc 2008 IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS), Beijing, China，2008

[23] Scolt A C, Chu F Y F，Mclaughlin D W. The soliton: a new concept in applied science. Proc IEEE，1973, 61: 1443~1482

第 1 章　连续介质力学和热力学初步

经典声学是连续介质力学的一个分支，它是研究机械扰动的产生、接收及其在连续介质中传播的一门学科，因此我们首先介绍这方面的有关基础知识。连续介质力学分为弹性力学和流体力学，前者研究的介质是固体，后者是液体和气体，这里只介绍后者。我们引入流点(流体质点)的概念，流点是这样的一个流体团，其中必须包含大量的流体分子，以使得其大小比分子之间的平均距离大得多，从而可以将它看成是一个连续体；但流点的尺度又要足够小，以使所有有关物理量在整个流点上看不出变化，从而成为点函数。历史上研究流体力学有两种数学描述体系，即欧拉体系和拉格朗日体系，在非线性声学领域内，两种体系都使用，下面分别介绍。

1.1　拉格朗日体系[1]

设连续的流体空间被无限个流点所充满，我们取流点在某个初始时刻(如 $t=t_0$)所在空间位置的笛卡儿坐标 a, b, c 为自变量，随着时间的变化，流点在空间运动，其瞬时位置为 x, y, z。显然，不同的流点(其起始坐标用 a, b, c 描写)在空间运动到不同的位置，其瞬时位置 x, y, z 依赖于 a, b, c 和 t，即

$$\left.\begin{aligned} x &= x(a,b,c;t) \\ y &= y(a,b,c;t) \\ z &= y(a,b,c;t) \end{aligned}\right\} \tag{1.1.1}$$

同样地，流体力学中各种物理量均取决于流点的位置和时间，从而恒可表示为 a, b, c, t 的函数。通常将 a, b, c 称为拉格朗日空间坐标，而将 $a, b, c; t$ 称为拉格朗日变量。下面将导出拉格朗日体系下的连续性方程和运动方程。

1．连续性方程

连续性方程实为质量守恒定律。设空间任一流点在初始时刻 $t=t_0$ 的坐标为 a, b, c，它所占据的体积元为 $\mathrm{d}V_0=\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c$，其质量为 $\mathrm{d}m_0=\rho_0\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c$，$\rho_0$ 是它在 $t=t_0$ 时的密度。在 t 时刻，它运动到 x, y, z 位置，其体元变为 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其密度为 ρ，质量为 $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。对于任一流点，由于质量守恒，故有

$$\rho_0 \mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c = \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

从数学分析可知，体元 $\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c$ 变到 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 有如下关系：

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = |J|\,\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c$$

$|J|$ 为雅可比函数行列式，且

$$|J| = \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix}$$

式中，$x_a = \dfrac{\partial x}{\partial a}$，以此类推。于是拉格朗日变量下的连续性方程可表示为

$$\rho_0 = \rho \begin{vmatrix} x_a & x_b & x_c \\ y_a & y_b & y_c \\ z_a & z_b & z_c \end{vmatrix} \tag{1.1.2a}$$

引入流点沿三个直角坐标方向的位移 ξ, η, ζ，它们都是 a, b, c；t 的函数，且有

$$\left.\begin{aligned} x &= a + \xi \\ y &= b + \eta \\ z &= c + \zeta \end{aligned}\right\} \tag{1.1.3}$$

代入(1.1.2a)式，很容易得到

$$\rho_0 = \rho \begin{vmatrix} 1+\xi_a & \xi_b & \xi_c \\ \eta_a & 1+\eta_b & \eta_c \\ \zeta_a & \zeta_b & 1+\zeta_c \end{vmatrix} \tag{1.1.2b}$$

退化到二维情况下的连续性方程为

$$\rho_0 = \begin{vmatrix} 1+\xi_a & \xi_b \\ \eta_a & 1+\eta_b \end{vmatrix} \tag{1.1.4}$$

同理，一维情况下的连续性方程是

$$\rho_0 = \rho(1+\xi_a) \tag{1.1.5}$$

2. 运动方程

首先我们讨论理想流体。所谓理想流体是指，它在运动中不出现机械能的损耗，在这种流体中，流点只是在压力的作用下运动，不存在其他外力。以后将会看出，理想流体是实际流体在雷诺数很大时的近似。在这种情况下，与非线性对流项的贡献比较，耗散对流动的影响可以忽略不计。非理想流体的运动方程将留待 1.4 节中讨论。

设有一块流体，其体积为 τ，包围这块体积的表面积为 S，根据牛顿第二定律

$$\int_\tau \rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial E^2} \mathrm{d}v = -\int_s p\boldsymbol{n} \mathrm{d}S \tag{1.1.6}$$

式中，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$ 为位置向量，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别为沿 x, y, z 方向的单位向量。根据高斯定理，有

$$\int_s p\boldsymbol{n} \mathrm{d}S = \int \nabla P \mathrm{d}\tau \tag{1.1.7}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 为表面 S 的单位法线向量，由表面向外是正方向。将上式代入(1.1.6)式得到

$$\int_\tau \left(\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial t^2} + \nabla P \right) \mathrm{d}\tau = 0$$

由于积分体积 τ 的任意性，要使上式始终成立，只有被积函数为零，于是

$$\rho \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}}{\partial t^2} = -\nabla P \tag{1.1.8}$$

或写成方程组的形式为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1.1.9}$$

将上面的三式分别乘以 $\frac{\partial x}{\partial a}$，$\frac{\partial y}{\partial a}$，$\frac{\partial z}{\partial a}$，…，相加后得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial a}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial a}\\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial b}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial b}\\ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial c}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial c}\end{aligned}\right\}\tag{1.1.10a}$$

将(1.1.3)式代入(1.1.10a)式，且将偏微商 $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ 写成 ξ_{tt}，$\frac{\partial\xi}{\partial a}$ 写成 ξ_a 等，则(1.1.10a)式可改写为

$$\left.\begin{aligned}\xi_{tt}(1+\xi_a)+\eta_{tt}\eta_a+\zeta_{tt}\zeta_a=-\frac{1}{\rho}P_a\\ \xi_{tt}\xi_b+\eta_{tt}(1+\eta_b)+\zeta_{tt}\zeta_b=-\frac{1}{\rho}P_b\\ \xi_{tt}\xi_c+\eta_{tt}\eta_c+\zeta_{tt}(1+\zeta_c)=-\frac{1}{\rho}P_c\end{aligned}\right\}\tag{1.1.10b}$$

上式即为拉格朗日体系下的运动方程组。对于二维情况，(1.1.10b)式退化为

$$\left.\begin{aligned}\xi_{tt}(1+\xi_a)+\eta_{tt}\eta_a=-\frac{1}{\rho}P_a\\ \xi_{tt}\xi_b+\eta_{tt}(1+\eta_b)=-\frac{1}{\rho}P_b\end{aligned}\right\}\tag{1.1.11}$$

一维情况下的运动方程为

$$\xi_{tt}(1+\xi_a)=-\frac{1}{\rho}P_a\tag{1.1.12}$$

1.2 欧 拉 体 系

在拉格朗日体系中，当 $t=t_0$ 时，各个流点的起始坐标为 a, b, c。当 $t>t_0$，这些流点不断运动，它们的空间坐标为 x, y 和 z，相应的位移为 ξ, η 和 ζ，显然，这些量都由运动方程来决定。流点的瞬时位置或者位移与时间的关系描出了它们的运动轨迹或者流线族，不同的初始坐标对应于不同的流点，因而对应于不同的流线。

在欧拉体系[2,3]中，不是以流点的初始坐标为自变量，而是引入空间坐标 $x, y,$

z 和时间 t 作为自变量。其中的 x, y 和 z 与拉格朗日体系中的 x, y, z 尽管符号相同，但具有不同的意义，后者表示的是某指定流点的瞬时位置坐标，而前者表示流动场空间的坐标变量。定义流体空间的速度场为

$$\boldsymbol{V}(x,y,z;t)=\boldsymbol{i}u_1(x,y,z;t)+\boldsymbol{j}u_2(x,y,z;t)+\boldsymbol{k}u_3(x,y,z;t) \tag{1.2.1}$$

式中，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 为沿 x, y 和 z 方向上的单位向量，u_1，u_2 和 u_3 分别为 $\boldsymbol{V}$ 的三个分量。为了推导运动方程，必须应用牛顿第二定律来讨论流体质点的运动，因而要将流体空间速度场与流点速度联系起来，为此，我们将 $\boldsymbol{V}(x, y, z; t)$看成是在 t 时刻处于 (x,y,z) 点的某流点的速度向量。在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻，该流点运动到了 $(x+u_1\mathrm{d}t, y+u_2\mathrm{d}t, z+u_3\mathrm{d}t)$ 点，于是 $\boldsymbol{V}(x+u_1\mathrm{d}t, y+u_2\mathrm{d}t, z+u_3\mathrm{d}t\,;t+\mathrm{d}t)$ 既表示在 $t+\mathrm{d}t$ 时刻空间$(x+u_1\mathrm{d}t,\ y+u_2\mathrm{d}t,\ z+u_3\mathrm{d}t)$点速度场的向量值，又表示在 t 时刻原来处在(x, y, z)点的那个流点运动到新的位置时的速度向量值。如 $\mathrm{d}t\to 0$，作展开

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{V}(x+u_1\mathrm{d}t,y+u_2\mathrm{d}t,z+u_3\mathrm{d}t;t+\mathrm{d}t)\\&=\boldsymbol{V}(x,y,z;t)+\frac{\partial\boldsymbol{V}(x,y,z;t)}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial\boldsymbol{V}(x,y,z;t)}{\partial x}u_1\mathrm{d}t\\&\quad+\frac{\partial\boldsymbol{V}(x,y,z;t)}{\partial y}u_2\mathrm{d}t+\frac{\partial\boldsymbol{V}(x,y,z;t)}{\partial z}u_3\mathrm{d}t\end{aligned}$$

由此可以求出流点的加速度

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+u_1\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial x}+u_2\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial y}+u_3\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial z}$$

通常上式右端用微分算符表示，而左端的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 表示为 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$，于是有

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial\boldsymbol{V}}{\partial t}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{V} \tag{1.2.2}$$

由(1.2.2)式可见，流点的加速度由两部分组成，第一部分是空间固定点的加速度，它表示了空间速度场的时间变化率，通常称为局部加速度；第二部分是流点从它在 t 时刻所在的空间点运动到 $t+\mathrm{d}t$ 时刻所在的空间点所获得的加速度，故称这一部分为对流加速度，注意它是非线性项。对于理想流体来说，其外力是声压，根据牛顿第二定律，流点的运动方程可写为

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=-\nabla P \tag{1.2.3}$$

欧拉体系的连续性方程也是质量守恒定律，即已知体积内流体质量的增加率等于单位时间流入该体积内的净质量。显然，后者等于

$$-\int_S \rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

已知体积内之质量增加率为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\tau \rho \mathrm{d}\tau = \int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau$$

式中，τ 为体积，S为它的表面积，S 的法线方向向外为正。由质量守恒定律可得

$$\int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}t = -\int_S \rho \boldsymbol{V} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

由高斯定理可得

$$\int_\tau \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V})\right]\mathrm{d}\tau = 0$$

对于任意的 τ 值若要求上式皆成立，只有要求被积函数为零，于是得到连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{1.2.4}$$

式中，$\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的散度。

1.3 物 态 方 程

从两种体系的运动方程和连续性方程可知，每种体系都有 5 个未知量，但方程式只有 4 个，即方程组不封闭，所以还要寻求另一个关系。这就是物态方程[4]，它描述了介质中热力学量之间的关系，一个均匀的热力学系统，至少必须用 3 个宏观热力学量来描述，例如，压力 P、密度 ρ 和温度 T，三者之间存在一个关系称为物态方程，即

$$F(P, \rho, T) = 0 \tag{1.3.1}$$

如果系统中还有其他化学元素或者存在内在变量(如弛豫过程)，则除了上述 3 个变量外，还要加进化学变量(如浓度)或其他内在变量(如弛豫时间等)。

对于理想气体经历的一个绝热过程，其物态方程为大家所熟知，即

$$P = P_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \tag{1.3.2}$$

式中，γ 为气体的比热比。在通常的声学问题中，即使是有限振幅声波，只要在弱冲击波理论适用的范围内，熵的变化是三阶量。所谓弱冲击波是指，物理量在冲击波阵面上的跳跃量与平衡量比较为一阶小量(见第3章)。因此在今后研究理想气体介质中的非线性声学问题只要求精确到二阶项时，物态方程就采用(1.3.2)式。但对于液体来说，物态方程只能用下式表示：

$$P = P(\rho, S)$$

式中，S 为熵，如认为过程是等熵的，将上式作级数展开

$$P = P_0 + A\delta + \frac{1}{2!}B\delta^2 + \frac{1}{3!}C\delta^3 + \cdots \tag{1.3.3}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
A &= \rho_0\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S,\rho_0} = \rho_0 c_0^2 \\
B &= \rho_0^2\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{S,\rho_0} \\
C &= \rho_0^3\left(\frac{\partial^3 P}{\partial \rho^3}\right)_{S,\rho_0} \\
\delta &= \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}
\end{aligned}\right\} \tag{1.3.4}$$

P_0 和 ρ_0 分别为 P 和 ρ 的平衡值。这些结果表明，气体和液体物态方程的形式不一样。为了使两者得到的结果在某些情况下可以互相转化，下面我们来找两组常数之间的对应关系。

对于气体，绝热方程为

$$\begin{aligned}
P &= P_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} = P_0(1+\delta)^{\gamma} \\
&= P_0\left[1 + \gamma\delta + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2!}\delta^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{3!}\delta^3 + \cdots\right]
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

将(1.3.5)式与(1.3.3)式对比可知，在二阶近似下，如果要将气体中得到的结果转化到液体的情况，只要将γ用$\frac{B}{A}+1$代替，即

$$\gamma=\frac{B}{A}+1$$

$\frac{B}{A}$在非线性声学中是一个重要的参数，通常称为非线性参数，定义

$$\frac{B}{2A}+1=\beta \tag{1.3.6}$$

式中，β为非线性系数①，$\frac{B}{A}$为描写介质非线性特性的量，在第14章中将详细讨论它。

1.4 纳维-斯托克斯方程

以上讨论的是理想流体，这种流体的运动不发生能量耗散，但实际流体的流动往往伴随着机械能转化为热能的过程，如存在黏滞摩擦，与此相对应的运动方程称为纳维-斯托克斯方程[2, 3]。

根据气体动力学理论，气体的切变黏滞是由分子的动量输运过程产生的。切变黏滞性使得流体相邻层之间出现了阻力，这种阻力与速度梯度成正比，比例系数即为切变黏滞系数(或称第一黏滞系数)。考虑到这个影响之后，在欧拉运动方程的右端增添了黏滞阻力项，产生了新的运动方程，历史上被称为经典的纳维-斯托克斯方程。实验表明，仅仅引入切变黏滞系数是不够的，因为利用上述方程研究声波在流体中的吸收问题表明，除了少数由单原子组成的流体以外，大部分流体声吸收的理论值都与实验值不符合。例如，对纯水来说，按切变黏滞理论算得声吸收的理论值仅是实验值的1/3左右，这表明还存在别的耗散过程。

当流体受压缩时，往往出现内部过程，例如，旧的平衡态受到破坏，要重新建立新的平衡态，而平衡态之间的转移经历了一个不可逆过程从而耗散能量。三种典型的耗散机理是大家所熟知的：第一，化学反应平衡受扰动；第二，物质结构排列状态平衡受扰动；第三，分子自由度能量分配平衡态受扰动。人们引入流体的第二黏滞系数或者体积黏滞系数来描写流体中的这类耗散过程，并将包含两个黏滞系数的流体运动方程称为广义纳维-斯托克斯方程。

---

① 因为在近年来人们将$\frac{B}{A}$称为非线性参数，故今后将把$\beta=\frac{B}{2A}+1$称为非线性系数。

在流体中取一个立体元，它除了受体积力 F_i 作用之外，它的每个界面还受到面力 t_{ij} 的作用(图 1.1)。由牛顿第二定律，流点的运动方程为

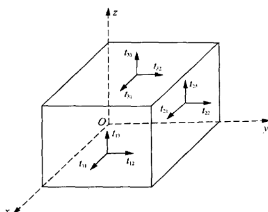


图 1.1　流体元上的面力

$$\rho\frac{\mathrm{D}u_1}{\mathrm{D}t}=\rho F_1+\frac{\partial t_{11}}{\partial x}+\frac{\partial t_{12}}{\partial y}+\frac{\partial t_{13}}{\partial z}$$
$$\rho\frac{\mathrm{D}u_2}{\mathrm{D}t}=\rho F_2+\frac{\partial t_{21}}{\partial x}+\frac{\partial t_{22}}{\partial y}+\frac{\partial t_{23}}{\partial z}$$
$$\rho\frac{\mathrm{D}u_3}{\mathrm{D}t}=\rho F_3+\frac{\partial t_{31}}{\partial x}+\frac{\partial t_{32}}{\partial y}+\frac{\partial t_{33}}{\partial z}$$

或用张量形式表示成

$$\rho\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t}=\rho F_i+\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.4.1}$$

式中，F_i 为单位质量上的体积力沿 x_i 方向上的分量，t_{ij} 为作用于 x_j 面单位面积上的面力沿 x_i 方向上的分量，而 t_{ij} 为二阶对称张量，将法线为 x_i 的平面称为 x_i 面。对于理想流体来说，有

$$t_{ij}=-P\delta_{ij}$$

式中，P 为压力，而

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

对于实际流体，一般有

$$t_{ij} = -P\delta_{ij} + T_{ij} \tag{1.4.2}$$

T_{ij}称为黏滞应力张量。引入应变率张量

$$\mathrm{d}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.4.3}$$

以及

$$\Theta = d_{11} + d_{22} + d_{33} = \nabla \cdot \boldsymbol{V} \tag{1.4.4}$$

$\boldsymbol{V}$ 为流体空间的速度向量式(1.2.1)，对于各向同性的流体，有

$$T_{ij} = \mu'\Theta\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \tag{1.4.5}$$

式中，μ 称为第一(或切变)黏滞系数，μ' 称为第二(或膨胀)黏滞系数，并将 $\mu' + \frac{2}{3}\mu$ 称为体积黏滞系数。将(1.4.2)式~(1.4.5)式代入(1.4.1)式容易得到

$$\rho\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} = \rho F_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu'\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \mu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j}\right)$$

或写成向量形式

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = \rho\boldsymbol{F} - \nabla P + (\mu' + \mu)\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{V} + \mu\nabla^2\boldsymbol{V} \tag{1.4.6}$$

(1.4.6)式即为广义纳维-斯托克斯方程。对于某些流体，如单原子气体，$\mu' + \frac{2}{3}\mu = 0$，即上式退化为经典纳维-斯托克斯方程，即

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = \rho\boldsymbol{F} - \Delta P + \frac{1}{3}\mu\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{V} + \mu\nabla^2\boldsymbol{V} \tag{1.4.7}$$

1.5　能 量 关 系[3]

众所周知，连续性方程是质量守恒定律的数学描述，运动方程是动量守恒定律的描述，现在我们来导出能量守恒方程。

在任意体积 τ 内，单位时间内增加的能量有三部分来源：第一部分是通过表面流入 τ 内的流体所带来的能量；第二部分是进入 τ 内的热量；第三部分是应力

对体内流体做功，用等式表示如下：

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau}\rho E\mathrm{d}\tau+\int_{A}\rho Eu_i\mathrm{d}A_i=-\int_{A}Q_i\mathrm{d}A_i+\int_{A}u_it_{ij}\mathrm{d}A_i$$

式中，Q_i 为单位时间流入单位面积（其法线是 x_i 方向）的热量，A 为体积 τ 的外表面，A_i 为面积 A 在 x_i 面上的投影，i, j 是要从 1 到 3 求和。利用高斯定理可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E)+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho Eu_i)=-\frac{\partial Q_i}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}(u_it_{ij}) \tag{1.5.1}$$

式中，E 为单位质量介质中的总能量，它包括动能 $E_{(\mathrm{k})}$、势能 $E_{(\mathrm{p})}$和内能 $E_{(\mathrm{i})}$，即

$$E=E_{(\mathrm{k})}+E_{(\mathrm{p})}+E_{(\mathrm{i})}$$

因为 $E_{(\mathrm{p})}$是重力场的势能，它是守恒的，故有

$$\frac{\partial E_{(\mathrm{p})}}{\partial t}=0$$

以及

$$\rho u_i\frac{\partial E_{(\mathrm{p})}}{\partial x_i}=-\rho u_iF_i$$

F_i 是体积力的 i 分量，是产生势能的力；此外，动能为

$$E_{(\mathrm{k})}=\frac{1}{2}u_i^2$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}E_{(\mathrm{k})}}{\mathrm{D}t}=\rho\left[\frac{\partial E_{(\mathrm{k})}}{\partial t}+u_j\frac{\partial E_{(\mathrm{k})}}{\partial x_j}\right]=\rho u_i\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]$$

应用(1.4.1)式可得

$$\rho u_i\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t}=\rho u_iF_i+u_i\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j}$$

于是有

$$\rho\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t}=\rho\frac{\mathrm{D}E_{(\mathrm{k})}}{\mathrm{D}t}+\rho\frac{\mathrm{D}E_{(\mathrm{p})}}{\mathrm{D}t}+\rho\frac{\mathrm{D}E_{(\mathrm{i})}}{\mathrm{D}t}=\rho\frac{\mathrm{D}E_{(\mathrm{i})}}{\mathrm{D}t}+u_i\frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.5.2}$$

在(1.5.1)式中代入连续性方程式，则其左边简化为 $\rho\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t}$，因此，合并(1.5.1)式和(1.5.2)式容易得到

$$\rho\frac{\mathrm{D}E_{(\mathrm{i})}}{\mathrm{D}t}=-P\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\frac{\partial Q_i}{\partial x_i}+T_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{1.5.3}$$

利用(1.4.4)式和(1.4.5)式可得

$$\begin{aligned}T_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}&=\mu'\Theta\delta_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+2\mu d_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\\&=\left(\mu'+\frac{2}{3}\mu\right)\Theta^2+\frac{4}{3}\mu\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right.\\&\quad\left.+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right\}\\&\quad+\mu\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)^2\right\}\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

将这个量用 Φ_η 表示。由热力学第二定律可知

$$T_1\mathrm{d}S=\mathrm{d}E_{(\mathrm{i})}+P\mathrm{d}\tau$$

式中，T_1 为绝对温度，$\mathrm{d}S$ 为单位质量介质中熵的变化，由于 $\tau=\rho^{-1}$，故 $\mathrm{d}\tau=-\rho^{-2}\mathrm{d}\rho$，所以

$$T\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}E_{(\mathrm{i})}}{\mathrm{D}t}-\frac{P}{\rho^2}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}$$

将连续性方程代入上式，可以得到

$$\rho T_1\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}=\rho\frac{\mathrm{D}E_{(\mathrm{i})}}{\mathrm{D}t}+P\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{1.5.5}$$

由于(1.5.1)式中的 Q_i 是通过 x_i 面单位面积的热量，如果它仅由热传导过程所产生，则

$$Q_i=-\kappa\frac{\partial T_1}{\partial x_i}$$

式中，κ为热传导系数，假设它是常数，则有

$$\frac{\partial Q_i}{\partial x_i} = -\kappa \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_i^2} \tag{1.5.6}$$

合并(1.5.3)式~(1.5.6)式，就得到能量守恒关系式

$$\rho T_1 \frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} = \kappa \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_i^2} + \Phi_\eta$$

或写成算符形式

$$\rho T_1 \frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} = \kappa \nabla^2 T_1 + \Phi_\eta \tag{1.5.7}$$

式中，Φ_η为(1.5.4)式的右端，流体力学中称为耗散函数。这个结果表明，介质的熵增加是由于热传导和黏滞耗散过程所引起的。

1.6　欧拉量与拉格朗日量之间的联系[5~13]

在拉格朗日体系中，一切物理量都属于流点，因为选取的自变量是时间t和流点在$t = t_0$时刻的初始坐标a, b, c，而流点在任一时刻t的瞬时位置x, y, z都是a, b, c, t的函数，这样选取自变量的意义是在$t=t_0$时，我们将每个流点贴上"标签"，(a_1, b_1, c_1)表示第一流点，(a_2, b_2, c_2)表示第二流点，依此类推。现有某个物理量$q^{\mathrm{L}}=q^{\mathrm{L}}(a, b, c, t)$，上标 L 表示$q$属于拉格朗日体系，$q^{\mathrm{L}}$代表在$t$时刻流点$(a, b, c)$所取的该物理量的数值。

欧拉体系选用的自变量是空间坐标x, y, z和时间变量t，任一物理量$q^{\mathrm{E}} = q^{\mathrm{E}}(x, y, z; t)$是在空间坐标系中各点来测量的(不是跟踪流点去测量的)。由此可见，同一个物理量在两个体系中表示式是不一样的，现在要寻找它们之间的联系。我们以这样的一些事实为出发点：第一，这里的$q^{\mathrm{E}}(x, y, z; t)$与$q^{\mathrm{L}}(a, b, c, t)$描写的是同一个物理量；第二，流点$(a, b, c)$在任何一个时刻$t$在空间的坐标是$x, y, z$，而两者的关系如(1.1.3)式所示。为了书写方便，我们就一维情况来讨论，二维、三维情况完全类似。

如上所述，$q^{\mathrm{L}}(a, t)$是流点a在t时刻q的量值，显然，这时流点的瞬时坐标为$a+\xi(a, t)$。另外，这一物理量在欧拉系中表为$q^{\mathrm{E}}(x, t)$，如果某流点在t时刻的空间坐标为x，根据拉格朗日流点的轨道向前追溯，它在$t = t_0$时刻的坐标为a，且有$x = a+\xi(a, t)$，于是t时刻在空间x点测得的物理量$q^{\mathrm{E}}(x, t)=q^{\mathrm{E}}(a+\xi, t)$，应与跟踪某流点$a$(它在$t_0$时刻坐标为$a$)在$t$时刻测得的量$q^{\mathrm{L}}(a, t)$相等，即有

$$q^{\mathrm{L}}(a,t)=q^{\mathrm{E}}(x,t)\Big|_{x=a+\xi(a,t)} \tag{1.6.1}$$

如果$\xi(a, t)$很小，则由展开(1.6.1)式可得

$$q^{\mathrm{L}}(a,t)=q^{\mathrm{E}}(x,t)\Big|_{x=a+\xi(a,t)}=q^{\mathrm{E}}(x,t)\Big|_{x=a}+\left.\frac{\partial q^{\mathrm{E}}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=a}\xi(a,t)+\cdots \tag{1.6.2}$$

上式表明，如果已知欧拉系中某物理量的表达式，则拉格朗日系中相同量的表示式可以根据(1.6.2)式求出。同理可得

$$q^{\mathrm{E}}(x,t)=q^{\mathrm{L}}(a,t)\Big|_{a=x-\xi(a,t)}=q^{\mathrm{L}}(a,t)\Big|_{a=x}-\frac{\partial q^{\mathrm{L}}(a,t)}{\partial a}\xi(a,t)+\cdots \tag{1.6.3}$$

此即为由 $q^{\mathrm{L}}(a, t)$求 $q^{\mathrm{E}}(x, t)$的关系式。从这两个式子容易看出，由于$q^{\mathrm{E}}(x,t)\big|_{x=a}=q^{\mathrm{L}}(a,t)\big|_{a=x}$，也就是说，两个式子中的第一项是相同的，但第二项一般说来是不同的，可是这一项是二阶量，由此可见，在两种体系中，同一物理量的表示式的差别是二阶量。例如，当q是密度，在一维情况下，拉格朗日体系中的连续方程为

$$\rho^{\mathrm{L}}=\rho_0\left(1+\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^{-1}=\rho_0\left[1-\frac{\partial\xi}{\partial a}+\left(\frac{\partial\xi}{\partial a}\right)^2-\cdots\right] \tag{1.6.4}$$

于是由(1.6.3)式可得

$$\begin{aligned}\rho^{\mathrm{E}}&=\rho_0\left\{1-\frac{\partial\xi}{\partial x}+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\frac{\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\xi}{\left(1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2}+\cdots\right\}\\&=\rho_0\left\{1-\frac{\partial\xi}{\partial x}+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\xi+\cdots\right\}\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

由此可见，两个表达式的形式之差的确是二阶量。同理，对于质点速度而言，两体系相应的表示式分别为

$$u^{\mathrm{L}}\equiv\frac{\partial\xi}{\partial t} \tag{1.6.6}$$

$$u^{\mathrm{E}}=\frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{\partial^2\xi}{\partial t\partial x}\xi \tag{1.6.7}$$

两者的差别也是二阶量。从这些结果可以得到结论：在线性声学近似范围内，不必考虑两种表达式之间的差别，或者说，在非线性声学领域内，两者是有区别的。

1.7　黏热流体中的拉格朗日方程[10]

1.6 节讨论了任何物理量在两种体系中的表达式之间的关系，人们不禁要问，由这些物理量组成的方程在两种体系中的形式之间能否建立某种联系呢？此外，在 1.4 节中我们导出了欧拉体系中的黏滞耗散动力学方程，纳维-斯托克斯方程，那么考虑到介质有黏性时，在拉格朗日体系中的运动方程又如何得到？由于拉格朗日体系的表示式在非线性声学中也经常被应用，故建立两种体制下方程组之间的联系是必要的。为简便起见，我们仍旧讨论一维情形。

设 t, x 和 $\xi(x, t)$分别是欧拉系中的时间、空间变量和位移①；T, a 和 $\eta(a, T)$分别是拉格朗日系中相应的量。显然，t 和 T 表示的都是时间，故有 $t = T$, 现在我们来寻求其他有关量的对应关系。如果在 t 时刻在空间 x 点测得该空间点流体的位移为 $\xi(x, t)$, 则根据运动规律可以反推到以前的 $t = t_0$ 时刻是哪一个流点与此相对应，于是有体的位移为 $\xi(x, t)$, 则根据运动规律可以反推到以前的 $t = t_0$ 时刻是哪一个流点与此相对应，于是有

$$\begin{aligned} a(x,t) &= x - \xi(x,t) \\ T(x,t) &= t \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

另外，如果通过反推，已经清楚地知道这些量原来是属于 $T=T_0$ 时刻初始坐标为 a 的那个流点，那么，它在 T 时刻的位置坐标是 $x(a, T)$, 其位移为 $\eta(a, T)$, 可以根据运动规律预测到，于是有

$$\begin{aligned} x(a,T) &= a + \eta(a,T) \\ t(a,T) &= T \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

如果上述的反推和预测是对同一流点而言的，则显然有 $\xi(x, t)=\eta(a, T)$, 由(1.7.1)式得到

$$\begin{aligned} a_x &= 1 - \xi_x \\ &= 1 - (\eta_a a_x + \eta_T T_x) \end{aligned}$$

因为 $T_x=0$, 故由上式容易推出

① 这是文献[10]作者的工作，其实在欧拉体系中未定义位移这个量。

$$a_x = \frac{1}{1+\eta_a}$$

同样，由于

$$\begin{aligned} a_t &= -\xi_t = -\eta_t[a(x,t), T(x,t)] \\ &= -\{\eta_a a_t + \eta_T T_t\} = -\eta_a a_t - \eta_T \end{aligned}$$

或者

$$a_t = -\frac{\eta_T}{1+\eta_a}$$

由此可见，两个体系中的导数关系为

$$\left.\begin{aligned} a_x &= (1+\eta_a)^{-1} \\ a_t &= -\frac{\eta_T}{1+\eta_a} \\ T_x &= 0 \\ T_t &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{1.7.3}$$

同理，可以求得

$$\left.\begin{aligned} x_a &= (1-\xi_x)^{-1} \\ x_T &= \xi_t(1-\xi_x)^{-1} \\ t_a &= 0 \\ t_T &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{1.7.4}$$

此即为沟通两组坐标系之间的变换关系。作为一个应用实例，下面将欧拉系的方程组变换为拉格朗日体系下的方程组。即已知

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} + \frac{\partial p}{\partial x} = (\mu' + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\rho T_1\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} = (\mu' + 2\mu)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \kappa\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}$$

现在要将这些方程变换为相应的拉格朗日体系下的方程组。由(1.7.1)式~(1.7.4)式可知

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial}{\partial T} = a_t \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial T} \\
&= -\eta_T (1+\eta_a)^{-1} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial T} \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial}{\partial a} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial}{\partial T} = a_x \frac{\partial}{\partial a} \\
&= (1+\eta_a)^{-1} \frac{\partial}{\partial a}
\end{aligned}
$$

将这二个微分算符对 ρ , u 进行运算可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \rho_T + \rho_a a_t \\
u\frac{\partial \rho}{\partial x} &= u\rho_a a_x \\
\rho\frac{\partial u}{\partial x} &= \rho u_a a_x
\end{aligned}
$$

将这些结果代入欧拉系的连续性方程式，则可将它变换为拉格朗日系中的连续性方程式，事实上有

$$
\rho_T (1+\eta_a) + \rho\eta_{aT} = 0
$$

或

$$
\frac{\partial}{\partial T}[\rho(1+\eta_a)] = 0
$$

积分得

$$
\rho(1+\eta_a) = \mathrm{C}
$$

C 是与 T 无关的积分常数，当 $T = T_0$ 时，流点的坐标为 a，全部流点的位移都为零，即 $\eta_a = 0, \rho(a, T_0) = \rho_0 = C$，于是有

$$
\rho(1+\eta_a) = \rho_0 \tag{1.7.5}
$$

这恰好是拉格朗日体系中连续性方程的一维形式(1.1.5)，这也说明上述变换是正确的。同样地可将纳维-斯托克斯方程(1.4.6)变换到拉格朗日体系中来。由于

$$
\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \rho u_T - u_a \eta_T (1+\eta_a)^{-1} + u u_a (1+\eta_a)^{-1} = \rho u_T
$$

这个简单的关系是很显然的，因为 $\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}$ 是流点的加速度，也是拉格朗日加速度，因而它恰好是 u_T，又一次证明这种变换是正确的。同理有

$$\frac{\partial P}{\partial x} = P_a a_x = P_a(1+\eta_a)^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [u_a(1+\eta_a)^{-1}]_a(1+\eta_a)^{-1}$$

由于 $u = \eta_T$，应用连续性方程(1.7.5)，最终得到

$$\rho_0\eta_{TT} + P_a = (\mu' + 2\mu)[\eta_{aT}(1+\eta_a)^{-1}]_a \tag{1.7.6}$$

此即为拉格朗日体系下的黏滞运动方程。当

$$\mu = \mu' = 0$$

时，利用(1.7.5)式可将(1.7.6)式化归(1.1.12)式。

现在来变换能量守恒方程(1.5.7)，由于

$$T_1\rho\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} = \rho T_1 S_T$$

$$u_x = u_a a_x = u_a(1+\eta_a)^{-1}$$

$$T_{1x} = T_{1a}a_x = T_{1a}(1+\eta_a)^{-1}$$

$$T_{1xx} = [T_{1a}(1+\eta_a)^{-1}]_a a_x = (1+\eta_a)^{-1}[T_{1a}(1+\eta_a)^{-1}]_a$$

由这些关系可将欧拉系中的能量守恒方程式变换为

$$\rho_0 T_1 S_T = (\mu' + 2\mu)\eta_{aT}^2(1+\eta_a)^{-1} + \kappa[T_{1a}(1+\eta_a)^{-1}]_a \tag{1.7.7}$$

(1.7.5)式~(1.7.7)式就是拉格朗日坐标系中的黏滞热传导流体方程组。应当注意，黏滞系数是首先在欧拉坐标系中引入的概念，到了拉格朗日体系，似乎需要重新认识，至少我们一眼就能看出，变换之后原方程中的对流项(即非线性项)消失了，但原来是线性关系的黏热项却成为非线性的；其次由(1.7.6)式和(1.7.7)式可以看出，原来在欧拉体系中的黏滞系数都有清晰的物理定义，可是变换到拉格朗日体系之后，要想使新的方程中与这些系数有关的项保持原来的形式意义，必须令

$$\frac{\mu^{\mathrm{E}}}{1+\eta_a} = \mu^{\mathrm{L}} \tag{1.7.8}$$

$$\frac{\kappa^{E}}{1+\eta_{a}}=\kappa^{L} \tag{1.7.9}$$

式中，μ^{E}, μ^{L}；κ^{E}, κ^{L} 分别为两个体系中的黏滞系数和热传导系数，上标 E 及 L 分别为欧拉体系和拉格朗日体系。这样一来，即使 μ^{E}, κ^{E} 原来都是常数 μ^{L}, κ^{L} 却都成为变量了。

1.8 线性声学的应用范围[14]

一般说来，不管是欧拉体系也好，还是拉格朗日体系也好，其流体力学方程都是非线性的，因而声传播过程也是非线性的。以后将会知道，非线性过程必然会伴随着波形失真，基波的能量不断向其他谐波转移，这就使得线性声学的一般结论不再成立。那么在什么情况下要考虑非线性过程，什么情况下又不需要考虑它呢？下面将找出一个判别标准。为简便起见，我们将从一维欧拉方程组出发，但得到的结论却是普遍适用的。首先讨论运动方程

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}=-C_{0}^{2}\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{2}P}{\partial\rho^{2}}\right)_{0}\frac{\partial(\rho-\rho_{0})^{2}}{\partial x}+b\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} \tag{1.8.1}$$

式中

$$b=\mu'+2\mu+\kappa\left(\frac{1}{C_{R}}-\frac{1}{C_{P}}\right) \tag{1.8.2}$$

C_P, C_V 分别为介质的定压比热和定容比热，这两个关系式是这样导出来的：只要将 1.9 节的(1.9.19)式代入(1.4.6)式即可。(1.8.1)式中的 $\rho u\frac{\partial u}{\partial x}$ 称为对流项。对于一列行波有

$$u=u_{0}\Phi\left[\omega\left(t-\frac{x}{C_{0}}\right)\right]$$

式中，Φ 为任意函数。我们来比较各项的相对大小，即

$$\frac{\rho u\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\rho\dfrac{\partial u}{\partial t}}\sim\frac{u_{0}^{2}\omega/C_{0}}{\omega u_{0}}=\frac{u_{0}}{C_{0}}=Ma \tag{1.8.3}$$

$$\frac{\rho u\dfrac{\partial u}{\partial x}}{b\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \sim \frac{\rho_0 u_0^2 \omega / C_0}{u_0 b\omega^2 / C_0^2} = \frac{\rho_0 C_0 u_0}{b\omega} = Re \tag{1.8.4}$$

式中, Ma 称为马赫数, 是质点速度与声速之比, 它是衡量非线性对流项与惯性项之比的量; Re 称为声雷诺数(以后简称雷诺数), 它是衡量对流项与耗散项之比的量。

同理, 对于连续性方程和物态方程来说, 非线性项与线性项之比是 $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ 和 Ma, 其中 ρ_0 和 ρ_1 分别为介质的零阶和一阶密度, 由于线性声学要求

$$\frac{u_0}{C_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p}{P_0} \tag{1.8.5}$$

式中, p 为声压, P_0 为介质的平衡压力, 因此, 当声学过程满足

$$Re \ll 1$$

$$Ma \ll 1 \tag{1.8.6}$$

时, 可以忽略非线性项。另一方面, 当 $Re \gg 1$ 时, 耗散项可以忽略, 从而流体可以当作是理想的。

1.9 热力学初步[4, 14]

声传播过程伴随着热的过程, 首先是由于介质受到声扰动, 其密度发生变化, 根据物态方程可知, 其温度也发生变化; 此外, 声传播过程中有一部分能量被耗散, 这部分声能量转化为热能, 因此, 热力学成为声学研究中必不可少的基础知识。限于篇幅, 本节的内容仅限于本书用到的那部分热力学范围, 而且是为了不熟悉热力学的读者写的。

首先我们讨论的介质是均匀的, 其中只有一种成分, 这种均匀体系的热力学状态可以用两个独立变量来描写, 如果我们指定温度 T 和压力 P 为独立变量, 则其他量都可以用这两个量来表示, 如比容 $\tau = \tau(P, T)$ 和内能 $U = U(P, T)$。若这个均匀系是多成分的, 则除了上述两个独立变量外, 还要引入若干个描写成分含量的独立变量。

现在来讨论热力学第一定律。当介质从一个平衡状态经历一个无限小的变化到达另一个平衡状态时, 其内能增加 $\mathrm{d}U$, 从外界取得热量为 ΔQ, 对外界做功 $P\mathrm{d}\tau$,

这三者有下述关系：

$$\Delta Q = \mathrm{d}U + P\mathrm{d}\tau \tag{1.9.1}$$

这个式子表明，介质从外界吸取的热量用于增加其内能以及对外界做机械功，这就是热力学第一定律，它实际上是能量守恒原理的热力学描述。

下面我们来讨论热力学第二定律，首先引入可逆过程的概念。如果某个过程的每一步都可以沿反方向进行，而不在外界引起其他变化，则这个过程称为可逆的。显然，在可逆过程中，介质和它的周围沿反方向进行的每一个状态都是原来沿正方向进行时相应的状态的重演。但自然界发生的绝大多数过程都是不可逆的，例如，当流体存在黏滞摩擦时，它在膨胀过程中的一系列状态就不能在压缩过程中重演，因为有一部分声能由于黏滞摩擦而转化为热。

根据大量的经验，总结出了热力学第二定律，关于这个定律的叙述是各式各样的，我们不打算对此进行深入讨论，有兴趣的读者可参看有关著作。根据热力学第二定律，可以得到著名的熵增加原理：一个绝热系统经历某个状态时，熵不减少。假设系统经过一个微小的变化，其过程是可逆的，在此过程中吸收热量为 ΔQ，相应的温度为 T，则可以定义该过程的熵变化为

$$\mathrm{d}S = \frac{\Delta Q}{T}$$

上述定理告诉我们，如果系统经历的一个绝热循环是可逆的，则 $\mathrm{d}S = 0$，如果过程不一定可逆，则 $\mathrm{d}S \geqslant 0$。

对于用两个独立变量描写的均匀体系，应用热力学第一定律可得

$$T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + P\mathrm{d}\tau \tag{1.9.2}$$

此即为热力学第二定律的数学方程。

现在我们导出几个有用的热力学关系，为此引入几个热力学函数。第一个是焓 H，第二个是自由能 F，第三个是吉布斯函数 G，它们分别定义如下：

$$\left.\begin{aligned} H &= U + P\tau \\ F &= U - TS \\ G &= U + P\tau - TS \end{aligned}\right\} \tag{1.9.3}$$

微分关系为

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}H &= T\mathrm{d}S + \tau\mathrm{d}P \\ \mathrm{d}F &= -P\mathrm{d}\tau - S\mathrm{d}T \\ \mathrm{d}G &= \tau\mathrm{d}P - S\mathrm{d}T \end{aligned}\right\} \tag{1.9.4}$$

由此可见，在 S, P 为独立变量的情况下，选取焓作为状态函数是方便的；同样在 τ, T 或 P, T 为独立变量时，分别选 F 或 G 作为状态函数是方便的。根据微分关系可知，如果选独立变量为 x, y，则 $z = z(x, y)$，有

$$\mathrm{d}z = A(x, y)\mathrm{d}x + B(x, y)\mathrm{d}y$$

可以得到

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial B(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \tag{1.9.5}$$

利用这个关系，由(1.9.2)式和(1.9.4)式容易得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial S}\right)_P, \left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \\ \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\tau &= \left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)_T, \left(\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\tau \end{aligned} \tag{1.9.6}$$

根据比热的定义

$$C = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{\Delta Q}{T} = \lim_{\Delta T \to 0}\left(\frac{\Delta U + P\Delta\tau}{\Delta T}\right)$$

对于定容比热 $C_V, \Delta\tau\ \ = 0$，故有

$$C_V = \frac{\Delta U}{\Delta T}_{\substack{\Delta T \to 0 \\ \tau = 常数}} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\tau$$

因为

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - P\mathrm{d}\tau = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\tau \mathrm{d}T + \left[T\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)_T - P\right]\mathrm{d}\tau$$

于是有

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_\tau = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\tau \tag{1.9.7}$$

同理可证

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$$

由(1.9.4)可知

$$C_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \tag{1.9.8}$$

选 $S = S(T, \tau)$, $\tau = \tau(T, P)$, 容易得到

$$\mathrm{d}S = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\tau + \left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)_T \left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_P\right]\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial \tau}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)_T \mathrm{d}P$$

由此得到

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\tau + \left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)_T \left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_P$$

或者有

$$C_P - C_V = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\tau \left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_P \tag{1.9.9}$$

此外, 如果 3 个变量间存在一个函数关系, 则有

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1 \tag{1.9.10}$$

定义

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial \tau}{\partial T}\right)_P &= \alpha_1 \\ -\frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial \tau}{\partial P}\right)_T &= \chi_1 \end{aligned}\right\} \tag{1.9.11}$$

(1.9.9)式可以写成

$$C_P - C_V = \frac{\tau T \alpha_1^2}{\chi_1} \tag{1.9.12}$$

下面举一个例子说明如何应用热力学关系来计算物态方程。设介质中的压力满足

$$P = P(\rho, S)$$

即认为介质是单一成分的均匀系。展开它为

$$\rho' = \rho - \rho_0,\ S' = S - S_0$$

的幂级数，即

$$P = P_0 + C_0^2 \rho' + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_S \rho'^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\rho S' \tag{1.9.13}$$

式中，C_0 为绝热声速，在线性声学范围，经历绝热过程时，只有前两项，第三项是非线性修正项，第四项是与熵有关的项，这里只展开到 S' 的一次幂，即认为 S' 至少是二阶小项，下面将利用(1.5.7)式求 S' 仅计算由于热传导所引起的熵变化，即

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial S'}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T'$$

式中温度差为

$$T' = T - T_0 = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S P' + \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P S' \approx \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S P'$$

仍认为熵变化是高阶小量(第 3 章将看出，的确如此)。将这个结果代入上式，得

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial S'}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \nabla^2 P'$$

利用线性声学近似：

$$P' = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t},\ \boldsymbol{V} = \nabla \varphi$$

代入上式，得到

$$S' = -\frac{\kappa}{T_0}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \nabla \cdot \boldsymbol{V} \tag{1.9.14}$$

利用(1.9.10)式，以及(1.9.6)式~(1.9.8)式，可得

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{T\tau\alpha_1}{C_P} \tag{1.9.15}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_\rho = C_0^2 \frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \tag{1.9.16}$$

$$C_P - C_V = -T\tau^2\alpha_1^2\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}\right)_T \tag{1.9.17}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}\right)_T = -\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T$$

因为$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T$ 为等温声速，它是C_0^2的 C_V/C_P倍，故有

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \tau}\right)_T = -\frac{C_0^2}{\tau^2}\frac{C_V}{C_P} \tag{1.9.18}$$

将(1.9.14)式 ~ (1.9.18)式代入(1.9.13)式，最终可得

$$P = P_0 + C_0^2\rho' + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}\rho'^2 - \kappa\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P}\right)\nabla\cdot\boldsymbol{V} \tag{1.9.19}$$

上式即为考虑有热传导情况下的修正物态方程式，以后将会用到。将上式代入(1.4.6)式，可得

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = \rho\boldsymbol{F} - C_0^2\nabla\rho' - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}\nabla\rho'^2 + b\nabla^2\boldsymbol{V} \tag{1.9.20}$$

式中

$$b = \mu' + 2\mu + \kappa\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P}\right)$$

即为(1.8.2)式。上面的计算应用了运动是无旋的假设，这时有

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{V} = \nabla\nabla\cdot\boldsymbol{V} - \nabla^2\boldsymbol{V} = 0$$

故有

$$\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{V} = \nabla^2\boldsymbol{V}$$

参 考 文 献

[1] 柯钦 И A 等. 理论流体力学. 曹俊等译. 北京：高等教育出版社, 1956

[2] 库兹涅佐夫 Д C. 流体动力学. 林鸿逊等译. 北京：高等教育出版社, 1957

[3] Landau L D. Lifshitz E M. Fluid mechanics.北京：世界图书出版公司, 1998

[4] 王竹溪. 热力学. 北京：高等教育出版社, 1955

[5] Westervelt P J. The mean pressure and velocity in a plane acoustic wave in a gas. Jour. Acoust Soc Am. 1950, 22: 319~327

[6] Borgnis F E. Acoustic radiation pressure of plane compressional waves. Rev Mod Phys, 1953, 25: 653~664

[7] Hunt F V. Notes on the exact equations governing the propagation of sound in fluids. Jour Acoust Soc Am, 1955, 27: 1019~1039

[8] Lindsay R B. Mechanical radiation. McGraw-Hill Book Company Inc, 1960

[9] Beyer R J. Radiation pressure-the history of a mislabeled tensor. Jour Acoust Soc Am, 1978, 63: 1025~1030

[10] Blackstock D T. Lagrangian one-dimensional equations of hydrodynamics for a viscous, thermally conducting fluid. Jour Acoust Soc Am, 1961, 33: 1245~1246

[11] Blackstock D T. On plane, spherical, cylindrical sound waves of finite amplitude in lossless fluids. Jour Acoust Soc Am, 1964, 36: 217~219

[12] Blackstock D T. Thermoviscous attenuation of plane, periodic, finite-amplitude sound waves. Jour Acoust Soc Am, 1964, 36: 534~542

[13] Blackstock D T. Propagation of plane sound waves of finite amplitude in nondissipative fluids. Jour Acoust Soc Am, 1962, 34: 9~30

[14] Rudenko O V, Soluyan S I. Theoretical foundations of nonlinear acoustics. New York : Consultants Bureau. New York :1977

第2章 理想介质中的有限振幅平面波

在线性声学领域中人们早已知道，一列单频平面波在无限延伸的理想介质中传播时，由于不存在边界反射，没有能量耗散，也没有频散现象，故它的波形保持不变，因而不产生其他频率成分，但当声学过程的雷诺数和马赫数逐渐增大时，按照1.9节的讨论可知，会越来越偏离线性声学的规律，因为这时介质中除了基波外还产生了各阶谐波和其他频率成分的波(如分频波和频波与差频波等)，其结果是波形逐渐发生畸变，基波能量逐渐减小，部分能量转移到谐波和其他波上去。

众所周知，小振幅声波在介质中传播的速度是 C_0，在均匀介质中它是与坐标无关的常数，但对于雷诺数足够大的有限振幅声波来说，介质中各点的声速(或称为局部声速)与该点的声扰动的大小有关，扰动大的传得快，扰动小的传得慢，故原来是正弦波的扰动，传播到一定距离之后，波峰将赶上波谷，形成具有间断面的冲击波。形成了的冲击波在传播过程中其间断量(冲击波的幅度)不断减小，久而久之又成为小振幅正弦波，不过这时的正弦波与原来的大振幅正弦波并不存在明显的联系。

本章仅讨论大振幅正弦波如何发展为冲击波的过程，至于冲击波形成之后的传播与衰变将在以后几章中处理。另外，本章也不讨论分频波，而将它留到第 16 章去讨论。

为了说明谐波的产生过程，我们先从一维的拉格朗日方程组出发，根据方程(1.1.5)和(1.1.12)以及理想气体的绝热方程，有

$$\rho = \rho_0 (1+\eta_a)^{-1}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial a}$$

$$P = P_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} = \frac{P_0}{(1+\eta_a)^{\gamma}}$$

式中，η 为沿 a 方向的位移，P 和 ρ 为压力及密度，P_0, ρ_0 分别为它们的平衡值。合并这3个式子容易得到

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial a^2} = \frac{(1+\eta_a)^{\gamma+1}}{C_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$$

设 $\eta_a < 1$，将 $(1+\eta_a)^{\gamma+1}$ 展成 η_a 的幂级数，则上式成为

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial a^2} - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = (\gamma+1)\eta_a \eta_{aa} - \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{2}\eta_a^2 \eta_{aa} + \cdots$$

令

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots$$

式中，η_i 为 i 阶小量，如不考虑高阶谐波的能量向低阶波的转移，则有

$$\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial a^2} - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial a^2} - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} = (\gamma+1)\frac{\partial \eta_1}{\partial a}\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial a^2}$$

$$\frac{\partial^2 \eta_3}{\partial a^2} - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 \eta_3}{\partial t^2} = (\gamma+1)\left[\frac{\partial \eta_1}{\partial a}\frac{\partial^2 \eta_2}{\partial a^2} + \frac{\partial \eta_2}{\partial a}\frac{\partial^2 \eta_1}{\partial a^2}\right] - \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{2}\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial a}\right)^2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial a^2}$$

$$\cdots\cdots$$

显然 η_1 满足的是齐次方程，这是因为不考虑高阶谐波相互作用产生的低阶波，致使它在场区是无源的。而 η_2, η_3，…满足非齐次方程，表示它们在场区是有源的，二阶场的源是一阶场相互作用产生的，三阶场的源是一阶场与二阶场的相互作用或者是由一阶场的 3 次自作用产生的……从数学上早就知道，非齐次波动方程的全部解是由两部分组成，一部分是齐次方程的解，另一部分是非齐次方程的特解。以二阶波作为例子(包括二阶谐波与和差频波，但下面的例子中仅讨论二阶谐波)，前者相应于二阶谐波的无源解，后者相应于它的强迫源解。如果基波的相速与二阶谐波相等，则这两类波的相速相等，于是二次谐波会产生强烈共振，这就使得谐波能量急剧增长。反之，当两者的相速不相等，这种共振不出现。因此，介质波速的频散特性对有限振幅波的传播情况影响极大，而无界空间的声学介质大多数是无频散或频散很弱的介质，其局部声速只是振幅的函数。

从上述公式还可以看出另一事实，即二阶波是由两个一阶波相互作用产生的，三阶波除了是由一阶波的三阶自作用产生以外，还有由一阶波与二阶波的相互作用产生的等，由此可见，高阶谐波的产生是以低阶波作为波源的，最终，各阶谐波

都是直接或间接地从基波中提取能量，故谐波的产生不仅伴随着波形的畸变，并且导致基波能量的减少。

2.1　黎曼-厄恩肖解与简单波

1860 年和 1858 年黎曼与厄恩肖分别独立地发表了他们的理论，即理想流体中的一维非线性波的严格解[1,2]，这个解对于有限振幅波发展成为冲击波的过程给予完整的描述。欧拉方程组为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{2.1.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2.1.2}$$

当上方程组中的非线性项为零时，则它们的解在线性声学已经熟知。在线性声学中，引入了所谓行波的概念，即任何波动量都可以写成变量 $x\pm ct$ 的函数，例如，声压 $P=F_1(x\pm ct)$，密度 $\rho=F_2(x\pm ct)$，因此它们之间可以互相表示(而不必显含坐标 x 和时间 t)像 $P=P(\rho), u=u(\rho)$ 等。比照这一点，在非线性声学中，为了得到对应的“行波”解，引入了所谓简单波假设，即

$$\rho=\rho(u),\quad P=P(u) \tag{2.1.3}$$

(2.1.3)式表明，如果知道质点速度 u 的波形，则密度和压力的波形完全由它来确定，通常将满足这个关系的波称作简单波。

将(2.1.3)式代入(2.1.1)式和(2.1.2)式得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left(u+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u}\right)\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2.1.4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}(\rho u)}{\mathrm{d}\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=0 \tag{2.1.5}$$

在上式中应用(1.9.10)式，容易得到

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_u=u+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u} \tag{2.1.6}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho=u+\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho} \tag{2.1.7}$$

由(2.1.3)式可知，u 不变相当于 ρ 不变，故(2.1.6)式与(2.1.7)式的左端实际上是相等的，于是合并之有

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u} = \rho^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho} \tag{2.1.8}$$

因为

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}u} = C^2 \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}u}$$

代入(2.1.8)式，可得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho} = \pm \frac{C}{\rho}$$

或者

$$u = \pm \int \frac{C}{\rho}\mathrm{d}\rho = \pm \int \frac{\mathrm{d}P}{\rho C} \tag{2.1.9}$$

将(2.1.9)式代入(2.1.6)式或(2.1.7)式，便有

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\rho = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_u = u \pm C \tag{2.1.10}$$

对上式进行积分，容易得到

$$x = (u \pm C)t + f(u)$$

式中，$f(u)$为任意函数，或者将上式用另一表达方式，有

$$u = F\left(t - \frac{x}{u \pm C}\right) \tag{2.1.11}$$

函数 F 是另一个任意函数，所以简单波的扰动是以局部速度 $C \pm u$ 传播的。对于理想气体，根据绝热物态方程可知

$$C^2 = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}\left(\frac{P}{\rho_0}\right)^{\gamma - 1}$$

由于

$$\frac{\gamma P_0}{\rho_0} = C_0^2 = \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\right)_S$$

代入(2.1.9)式，得到

$$u = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{C}{\rho} \mathrm{d}\rho = \pm \frac{2}{\gamma - 1}(C - C_0)$$

或者

$$C = C_0 \pm \frac{\gamma - 1}{2} u \tag{2.1.12}$$

因为 $C+u$ 为正向扰动传播速度，则有

$$C + u = C_0 + \frac{\gamma + 1}{2} u$$

在第 1 章曾经指出过，因为

$$\frac{B}{2A} + 1 = \beta$$

对于理想气体经历绝热过程时，有

$$\beta = \frac{1}{2}(\gamma + 1)$$

故简单波的局部传播速度为

$$C + u = C_0 + \beta u \tag{2.1.13}$$

式中，C_0 为小振幅声波传播速度，β 为介质的非线性系数，u 为质点速度。这个结果表明，有限振幅扰动传播的速度比小振幅声波传播速度多了一项 βu，因为 $\beta>0$，则在 $u>0$ 的地方传播速度 $C+u$ 大于 C_0，当 $u<0$ 时，$C+u<C_0$。当初始扰动是角频率为 ω 的正弦扰动时，那么在 t 时刻在 x 点扰动成为

$$u = u_0 \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{C_0 + \beta u}\right) \tag{2.1.14}$$

显然，波形上各点相对于 $u=0$ 的点有一个传播速度差 βu，为了清晰地看出波形的畸变，假设观察者也以速度 C_0 伴随波形一起运动，即与图 2.1 中的点 1，2 和 3 三个点一起运动，根据(2.1.13)式，局部声速与 u 有关，由于波峰处的 $u>0$，波谷处 $u<0$，而点 z 处 $u=0$，故必有波峰将追赶上点 2，波谷将落后而靠近点 2，于是，波形不断畸变，但无论如何，不允许 u 是变量的多值函数，故最终波形在 2 点处形成

陡峭的锯齿形间断(见图 2.1(c)实线部分)，即形成冲击波面，或者称为间断面，在它的两侧质点的速度有一个跳跃，因而根据伯努利定理，在一个薄层的两侧，压力相差很大。如果这个压力差大于物体的断裂强度，则物体将遭到破坏，如强度足够大的冲击波，足以使窗玻璃破碎。顺便说一下，本节讨论的是无限波列，而在作图时只画出了一个周期的波。

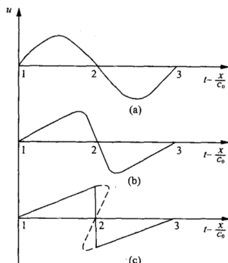


图 2.1　波形畸变过程

2.2　冲击波间断面的位置[3~8]

设在 $x=0$ 处有一声源，这里的扰动为

$$u=u_0\sin\omega t \tag{2.2.1}$$

将这个条件代入到一般解(2.1.11)中，显然，式中的任意函数 F 要用正弦函数代替，故以(2.2.1)式为初始扰动的有限振幅波的严格解为

$$u=u_0\sin\omega\left[t-\frac{x}{C_0\left(1+\beta\dfrac{u}{C_0}\right)}\right] \tag{2.2.2}$$

式中，β 为介质的非线性系数，它等于 $\frac{B}{2A}+1$，对于理想气体 $\beta=\frac{(\gamma+1)}{2}$，$\gamma$ 为理想气体的比热比，正如上面提到过，(2.2.2)式是一维简单波的准确解，但不便于应用。于是需要将上式括号中的量展成马赫数的级数，保留到一阶项，这样(2.2.2)式可写成

$$u=u_0\sin\left[\omega\left(\tau+\beta\frac{u}{C_0^2}x\right)\right] \tag{2.2.3}$$

式中

$$\tau=t-\frac{x}{C_0}$$

为了研究一列有限振幅正弦波传播多远的距离才能形成冲击波，以及冲击波形成之后如何确定间断面的位置，假设这个间断已经形成，并设这个面相对于固定坐标系以速度 U_s 运动，在它的两侧流体的质点速度分别为 u_1 和 u_2，从质量守恒定律可知，流入间断面的流体质量应等于流出这个面的流体质量，即

$$\rho_1(u_1-U_s)=\rho_2(u_2-U_s)$$

式中，ρ_1 和 ρ_2 分别为间断面两侧的流体密度，由此可以解出

$$U_s=\frac{\rho_2u_2-\rho_1u_1}{\rho_2-\rho_1} \tag{2.2.4}$$

由(2.1.8)式和(2.1.9)式，容易证明

$$\frac{\rho}{\rho_0}=1+\frac{u}{C_0}+(2-\beta)\frac{u^2}{C_0^2} \tag{2.2.5}$$

代入(2.2.4)式，准确到马赫数的一阶项，得到

$$U_s=C_0\left[1+\frac{\beta}{C_0}\frac{(u_1+u_2)}{2}\right] \tag{2.2.6}$$

有了这些关系之后，就可以着手寻求冲击波的间断面的位置了。如图 2.2 所示，AE 是间断面的位置，它与 x 轴交 x_0 处，显然，面积分

$$\int_{u_1}^{u_2}(x-x_0)\mathrm{d}u=\Sigma$$

表示图 2.2 中阴影部分的面积。

现在来计算这块面积在传播过程中随时间的变化情况，即对时间求导数

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{u_1}^{u_2}(x-x_0)\mathrm{d}u=\int_{u_1}^{u_2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_u-\left(\frac{\partial x_0}{\partial t}\right)_u\right]\mathrm{d}u$$

因为$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_u=C_0+\beta u$，以及$\left(\frac{\partial x_0}{\partial t}\right)_u=U_s$，利用(2.2.6)式，上述积分等于零，即

$$\frac{\mathrm{d}\Sigma}{\mathrm{d}t}=0 \tag{2.2.7}$$

从这个结果可知，由于在冲击波开始形成时，Σ 为零，根据(2.2.7)，在传播过程中 Σ 恒为零。由图 2.2 可知，面积 ABC 等于 CDE，即间断面 AE 两侧阴影部分的面积相等，这个“相等”不随时间变化，利用这个性质可以确定间断面的位置。应当强调一下，上述结论在二级近似范围内是正确的。现在应用这个性质来讨论两个例子。

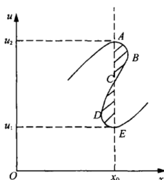


图 2.2 u 与 x 的关系

例 1 无限长的锯齿波列。

现在来研究一列无限长的锯齿波列的间断面振幅随时间变化的情况。图 2.3(a)是一列无限长的理想冲击波列，每一个周期的波形由两个直角三角形组成，现在应用(2.2.7)式来计算它在传播过程中振幅的衰减。设它的初始速度振幅在 $t=t_0$ 时为 u_0，半“周期”为 l_0，根据(2.1.13)式可知，图 2.3(b)中的 D 点运动到 B 点，原来的直角三角形 ADC 变形成斜三角形 ABC，其面积可以写成

$$S_{ABC}=\Delta AEC+\Delta BEC=\frac{1}{2}[\overline{CEl_0}+\overline{CEBD}]$$

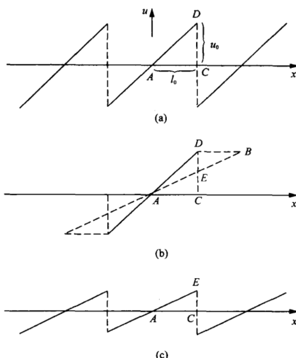


图 2.3　无限延伸的锯齿波列的演变

由(2.1.13)式可知，在 D 点运动到 B 点的过程中，它相对于间断面产生了一个横向位移

$$\overline{BD} = \beta u_0 (t - t_0)$$

将 $\overline{CE}$ 用 u 表示，即 $\overline{CE} = u$，于是有

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\{ul_0 + uu_0\beta(t - t_0)\}$$

根据(2.2.7)式的面积不变性质，有

$$S_{ADC} = \frac{1}{2}u_0 l_0 = S_{ABC}$$

上面的讨论中，已经隐隐地应用了公式(2.2.6)，即任一间断面与横坐标的交点 C 运动的速度 $U_s = C_0$，(因为 $u_1 = -u_2$)，或者说无限延伸的周期性锯齿波列的波长不随时间变化。另外，三角形 ABC 并非物理上可实现的波形，正如以前讨论中

说过的，由于物理量不可能是多值的函数，因此 t 时刻的冲击波波形应是 AEC(图 2.3(c))，即间断面的高度由 u_0 变为 u，而且

$$u=\frac{u_0}{1+\dfrac{\beta u_0 t}{l_0}} \tag{2.2.8}$$

能量 E 为

$$E=\frac{E_0}{\left(1+\dfrac{\beta u_0 t}{l_0}\right)^2} \tag{2.2.9}$$

为书写方便，这里已令 $t_0=0$。由这个结果可以看出，当 $\beta u_0 t/l_0>1$ 时，$u\sim 1/t$，这意味着，即使是在理想介质中，有限振幅正弦平面波形成的冲击波能量也是要衰减的。

值得提一下的是，由于各个间断面以速度 C_0 运动，实际上它们的横坐标是变化的，但它们之间的相对位置不变，故在图 2.3 中不必强调它们在 x 轴的绝对位置。

例 2　单一锯齿脉冲——N 波。

上例表明，一列无限长的锯齿波在传播过程中，振幅随传播距离的增大而减小，但是波列的周期始终保持不变。如果有限振幅扰动是单个锯齿脉冲，或者称作 N 波(图 2.4)，结果将有所不同，其讨论如下：

图 2.4(a)给出了一个 N 波，为简便起见，我们只讨论它的一半。在 $t=0$ 时，脉冲的形状是 ABC，在 t 时刻由于有(2.1.13)式，波形上的各点传播速度不同，因而直角 ΔABC 变成 $\Delta AB'C$(图 2.4(b))，显然，当 x 超过 C 点时，u 与 x 的关系是多值函数关系，故 $\Delta AB'C$ 的波形是物理上不能实现的。另外，变形过程又要满足等面积的性质，只有 ΔADE 的波形能够满足这两个要求。为了要求它满足等面积关系，有

$$\Delta CEF=\Delta DB'F$$

由(2.1.13)可知，B' 点相对 C 点移动一个距离为 $\beta u_0 t$，故有

$$\tan\angle DAE=\frac{u_0}{l_0+\beta u_0 t}$$

令

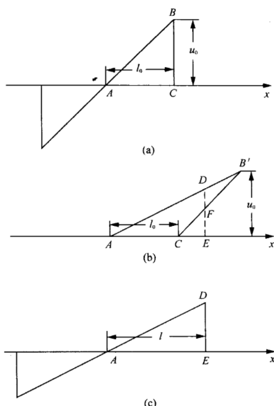


图 2.4　N 波的演变

$$l = AE$$

于是三角形 ADE 的面积等于

$$S_{ADE} = \frac{l^2 u_0}{2(l_0 + \beta u_0 t)} = \frac{l_0 u_0}{2}$$

或者

$$l = l_0 \sqrt{1 + \frac{\beta u_0 t}{l_0}} \tag{2.2.10}$$

由于 $u = DE$, 故冲击波瞬时间断面的振幅为

$$u = \frac{u_0}{\sqrt{1 + \frac{\beta u_0 t}{l_0}}} \tag{2.2.11}$$

这时波形如图 2.4(c)所示。

由所得结果可知，N 波的间断面振幅随时间的衰减是$\sim 1/\sqrt{t}$，即比无限长锯齿波列慢。另一个现象是 $l > l_0$，即 N 波在传播过程中不像无限锯齿波那样，其长度越拉越长。

2.3　贝塞尔-富比尼解[9]

从前面得到的结果可以知道，黎曼-厄恩肖解因而其特定形式正弦扰动解(2.2.2)是精确解。但是这个式子以及它的二级近似下的解(2.2.3)都是以泛函形式出现，使用起来颇不方便，下面设法将它写成显函数形式。为此，首先将(2.2.3)式写成

$$u = u_0 \sin\left(\omega\tau + \sigma\frac{u}{u_0}\right) \tag{2.3.1}$$

式中

$$\sigma = Ma\beta kx \tag{2.3.2}$$

式中，β 为非线性系数，k 为波数，$Ma = u_0/C_0$ 为马赫数，σ 为以冲击波形成距离(其物理意义将在下面叙述)为尺度的距离变量(量纲为一距离)，这样就可以改写(2.3.1)式为

$$\omega\tau = \arcsin\frac{u}{u_0} - \sigma\frac{u}{u_0} \tag{2.3.3}$$

现在对(2.3.3)式作进一步研究。为此，令

$$\omega\tau = y$$

$$\arcsin\frac{u}{u_0} = y_1$$

$$-\sigma\frac{u}{u_0} = y_2$$

以及

$$y = y_1 + y_2$$

图 2.5 中取 u/u_0 为横坐标，y_1 和 y_2 分别为两个函数曲线，(a)，(b)和(c)分别是 $\sigma<1$，$\sigma=1$ 以及 $\sigma>1$ 三种情况的图示，图中的直线都是 $y_2 = -\sigma\frac{u}{u_0}$，$y_1$ 表示正弦反函数曲线，它们都是实线，而所有的虚线都表示 y_1 与 y_2 的和。显然，当 $\sigma<1$ 时，y 不出现间断，只是畸变了曲线；当 $\sigma=1$ 时，冲击波刚形成，因此，通常将

$$X_s = (Ma\beta k)^{-1} \tag{2.3.4}$$

称为冲击波形成距离，这时，曲线 ABC 和 $A'B'C$ 是锯齿形的，其振幅与正弦波的振幅相等；当 $\sigma>1$ 时，虚曲线 ABC 和 $A'B'C$ 是多值的，因而物理上可实现的波形如 ADC 和 $A'D'C$ 所示。(2.3.4)式告诉我们，X_s 与 β, M_0 和 k 三个量成反比，即对于非线性很强的介质来说，高频大振幅波最容易形成冲击波。

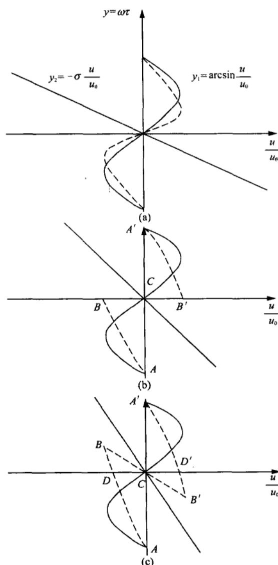


图 2.5　波形与 σ 的关系

现在将(2.3.1)式展成傅里叶级数，即

$$\frac{u}{u_0}=\sin\left(\omega\tau+\sigma\frac{u}{u_0}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\sigma)\sin n\omega\tau \tag{2.3.5}$$

式中

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\omega\tau+\sigma\frac{u}{u_0}\right)\sin n\omega\tau\mathrm{d}(\omega\tau) \tag{2.3.6}$$

为了计算 B_n，令

$$\Phi=\omega\tau+\sigma\frac{u}{u_0}$$

于是有

$$\frac{u}{u_0}=\sin\Phi$$

或

$$\Phi=\omega\tau+\sigma\sin\Phi \tag{2.3.7}$$

根据前面的结果可知，只要在 $\sigma<1$ 时，$\omega\tau$ 是 Φ 的单值函数，当 $\sigma>1$ 时，(2.3.7)式就不是一个单值变换，为了保证(2.3.7)式的变换是一一对应的，则必须要 $\sigma<1$。

将(2.3.7)式代入(2.3.6)式可以得到

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\Phi\sin[n\Phi-n\sigma\sin\Phi]\mathrm{d}[\Phi-\sigma\sin\Phi]$$

利用分部积分可得

$$B_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\Phi-n\sigma\sin\Phi)\mathrm{d}\sin\Phi$$

将(2.3.7)式代入上式，有

$$B_n=\frac{2}{n\pi\sigma}\left[\int_0^{\pi}\cos n\omega\tau\mathrm{d}(\omega\tau)-\int_0^{\pi}\cos(n\Phi-n\sigma\sin\Phi)\mathrm{d}\Phi\right]$$

因为 n 为整数且有 $n\geqslant1$，故上式花括号中第一项为零，利用贝塞尔函数和积分表达式

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx - n\sigma\sin x)\mathrm{d}x = \mathrm{J}_n(n\sigma) \tag{2.3.8}$$

代入上式最终得到

$$B_n(\sigma) = \frac{2\mathrm{J}_n(n\sigma)}{n\sigma} \tag{2.3.9}$$

代入(2.3.5)式，有

$$\frac{u}{u_0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mathrm{J}_n(n\sigma)}{n\sigma}\sin n\omega\tau \tag{2.3.10}$$

即为熟知的贝塞尔-富比尼(Fubini)解。由上述推导过程可知, (2.3.10)式仅在 $0\leqslant\sigma<1$ 范围内成立, (2.3.10)式告诉我们, 从声源发出的有限振幅正弦波, 只要介质的非线性系数 $\beta\neq 0$, 则随着传播距离的增加, $\mathrm{J}_n(n\sigma)$不为零, 于是谐波成分逐渐增长, 基波成为逐渐减小。应当提起是, (2.3.5)式是在(2.2.2)式中取了小马赫数近似后得到的。在这个式子中, 由于 u/u_0 是 $\omega\tau$ 的奇函数, 故可以将它展成正弦傅里叶级数。如果不取近似, 即从(2.2.2)式出发, 这时 u/u_0 是 $\omega\tau$ 的函数是非奇非偶的, 它的傅里叶级数展开应包含正弦项和余弦项两部分[10], 即

$$\begin{aligned}\frac{u}{u_0} &= \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{C+u}\right) = \sin\left(\omega\tau + \frac{\sigma\dfrac{u}{u_0}}{1+\beta Ma\dfrac{u}{u_0}}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos(n\omega\tau) + B_n\sin(n\omega\tau)]\end{aligned} \tag{2.3.11}$$

式中

$$\tau = t - \frac{x}{C_0},\quad \sigma = \beta Makx \tag{2.3.12}$$

令

$$\frac{u}{u_0} = \sin\varPhi \tag{2.3.13}$$

由此得到傅里叶系数

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u}{u_0}\cos(n\omega\tau)\mathrm{d}(\omega\tau)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\Phi\cos\left[n\left(\Phi-\frac{\sigma\sin\Phi}{1+\beta Ma\sin\Phi}\right)\right]\left(1-\frac{\sigma\cos\Phi}{(1+\beta Ma\cos\Phi)^2}\right)\mathrm{d}\Phi \tag{2.3.14}$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u}{u_0}\sin(n\omega\tau)\mathrm{d}(\omega\tau)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\Phi\sin\left[n\left(\Phi-\frac{\sigma\sin\Phi}{1+\beta Ma\sin\Phi}\right)\right]\left(1-\frac{\sigma\cos\Phi}{(1+\beta Ma\cos\Phi)^2}\right)\mathrm{d}\Phi \tag{2.3.15}$$

而富比尼解的傅里叶系数为

$$\bar{B}_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos\Phi\cos(n\Phi-n\sigma\sin\Phi)\mathrm{d}\Phi \tag{2.3.16}$$

由(2.3.11)式可知，如果 A_n=0，则 $B_n=\bar{B}_n$，即为富比尼解。在一般情况下，要对(2.3.15)和(2.3.16) 在冲击波形成以前的情况下做数值计算。其结果表明：对于空气，β=1.4, Ma≤0.2；对于水，β=3.5，当 Ma≤0.07 时，直到四阶谐波，富比尼解与精确解差别不是太大。

当 σ≥1，冲击波形成，展开式(2.3.10)不再实用，而必须代之以冲击波理论和法伊(Fay)解，这些问题将在以后的章节中详细讨论。

2.4 特征线族与 R-E 不变量及其应用

在 2.1 节中我们在一种特殊情况下定义了简单波，即假设了 $p=p(u)$，$\rho=\rho(u)$等，或者说，这些量之间只要通过一种函数变换即可相互表达，即 $u=u(\rho)$，$\rho=p(p)$等。将这些关系代入欧拉体系的场方程组，即可得到(2.1.9)式~ (2.1.11)式，历史上称其为黎曼解。由于厄恩肖也独立地得到这些结果，故本书将称它为黎曼-厄恩肖解(R-E 解)。解中含有正负号“±”分别代表沿正反两个方向传播的简单波，它们是有限振幅波理论中两个“行波”。在简单波理论中已经隐含了下述假设，即流动过程是等熵的，因为表示式 $p=p(\rho)$本身没有将熵作为物态变量。在第 3 章中将会看到，等熵过程的假设只在弱冲击波(或弱间断)情况下成立，这时熵的变化为三阶量。

在线性波动理论中，通过行波变换，将波动方程变成可解形式，人们得到了著名的达朗贝尔解

$$u(\pm)=f(x\pm Ct)$$

它们表示了沿正反二个方向传播的行波，这两个方向取决于所谓特征线方程

$$\left.\begin{aligned} x - Ct &= \text{常数} \\ x + Ct &= \text{常数} \end{aligned}\right\} \tag{2.4.1}$$

式中，C 为波速，在均匀介质中，它为常数，在非均匀介质中它与坐标有关，故有时称 C 为局部波速，以强调它在空间的可变性。当 C 为常数，(2.4.1)式在(x, t)平面上为两条直线，如果将它们右端的“常数”作为参数，则(2.4.1)式表示了两族直线；若 C 与坐标有关，则(2.4.1)式表示的是两族曲线。波动问题的任何解都可用达朗贝尔解来表达，这相应于任何扰动的传播都可以分解成沿特征线的传播的叠加，特征线描写传播的好处是它的变量不是 t 或者 x，而是 $x \pm Ct$，即所谓行波变量，它是描述波传播特性较为合适的变量。

在非线性波理论中，如非线性声学中的 R-E 解或简单波解中，特征线也有两族(因为双曲型方程有两族特征线)[1,2,11~13]，它们被(2.1.10)式决定，即

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_u = u + C, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_u = u - C$$

对应的 R-E 解为

$$\left.\begin{aligned} x &= (u + C)t + f_+(u) \\ x &= (u - C)t + f_-(u) \end{aligned}\right\} \tag{2.4.2}$$

如果将 u 当作参变量，则(2.4.1)式在$(x,\ t)$平面内表示两族曲线，即所谓特征线，因为在简单波中声速 $C=C(p,\ \rho)$，故 C 只是 u 函数，因而(2.4.2)式中的线族的确以 u 为参变量。在 u 固定时，将(2.4.2)式对 t 求导，即可得到(2.1.10)式。值得再强调一下，上述结果是在简单波假设(2.1.3)的前提下得到，在这一条件下，在确定的特征线上，u 为不变量，下面我们将对在等熵过程中这个问题作更普遍的讨论[13]。

在等熵过程中，我们引入一个热力学量

$$\lambda = \int \frac{c}{\rho} \mathrm{d}\rho = \int \frac{1}{\rho c} \mathrm{d}P \tag{2.4.3}$$

将这个关系式应用到(2.1.1)式和(2.1.2)式中，容易得到

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial \lambda}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial t} + u\frac{\partial \lambda}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.4.4}$$

将(2.4.4)式中的两个式子相加和相减可以分别得到

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial J_+}{\partial t}+(u+c)\frac{\partial J_+}{\partial x}=0\\ \frac{\partial J_-}{\partial t}+(u-c)\frac{\partial J_-}{\partial x}=0\end{aligned}\right\} \tag{2.4.5}$$

式中

$$J_+=u+\lambda,\quad J_-=u-\lambda \tag{2.4.6}$$

称为两个黎曼-厄恩肖不变量，或简称 R-E 不变量，而将(2.4.3)式称为厄恩肖关系式。两个 R-E 不变量J_+和J_-在各自的特征线上为不变量，在各自的特征线族上为参变量，将(2.4.6)式与(2.1.9)式比较可知，由于我们在 2.1 节中作了简单波假设，于是得到

$$u=\pm\lambda \tag{2.4.7}$$

当$u=\lambda$时，有

$$J_-=0$$

(2.4.5)式中只存在第一个方程，第二个为恒等式，这时介质中只有简单波J_+传播；另外，当$u=-\lambda$时，有

$$J_+=0$$

(2.4.5)式中只存在第二个方程，第一个是恒等式，这时介质中只有简单波J_-传播。

如果不作简单波假设，(2.4.7)式不成立，故在一般情况下，(2.4.5)式有两个方程，介质中有两个波传播，它们用相应的参变量J_+和J_-来描写，因此 R-E 不变量也可称为 R-E 参变量。显然

$$u=\frac{J_++J_-}{2},\quad \lambda=\frac{J_+-J_-}{2} \tag{2.4.8}$$

如果初始扰动为正弦波，由于 u 为两个正反方向的“行波”相加，于是便有“驻波”的形式，因此黎曼-厄恩肖广义理论可以研究一维有界空间的有限振幅波的问题。

到目前为止，我们讨论了简单波的波速，对于理想气体的绝热过程其局部声速由(2.1.12)式决定。

对于理想气体，如果有限振幅波的局部声速为 C，从(2.4.3)式很易得到

$$\lambda=\frac{2}{\gamma-1}(C-C_0) \tag{2.4.9}$$

因此，不变量 J_+ 的特征速度为 $u+C$，即

$$u+C=u+C_0+\frac{\gamma-1}{2}\lambda=C_0+\frac{\gamma+1}{2}u-\frac{\gamma-1}{2}J_- \tag{2.4.10}$$

同理对于 J_- 的特征速度为

$$u-C=u-C_0-\frac{\gamma-1}{2}\lambda=-\left(C_0-\frac{\gamma+1}{2}u+\frac{\gamma-1}{2}J_+\right) \tag{2.4.11}$$

上述结果表明，当 $J_+=0$ 或 $J_-=0$ 时，它们退化为简单波的情况，在一般情况下，J_+，J_- 不恒为零，也不一定相等，但是它们在自己的特征线族上为参变量。由此可见，R−E 不变量的的特征速度(在一般情况下)不同于 R−E 简单波的特征速度，只有在 $J_+=0$ 或 $J_-=0$ 时，两者才相等。

对于理想气体的等熵过程，由(2.4.4) 式可得

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{J_+}&=u+C=C_0+u+\frac{\gamma-1}{2}\lambda\\&=C_0+\frac{\gamma+1}{4}J_+-\frac{\gamma-3}{4}J_-\\\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{J_-}&=u-C=-C_0+u-\frac{\gamma-1}{2}\lambda\\&=-C_0-\frac{\gamma-3}{4}J_++\frac{\gamma+1}{4}J_-\end{aligned}\right\} \tag{2.4.12}$$

对上式积分

$$\left.\begin{aligned}x&=\left(C_0+\frac{\gamma+1}{4}J_+\right)t+X_++f(J_+),\quad X_+=-\frac{\gamma-3}{4}\int_{J_+=\text{const.}}J_-(x,t)\mathrm{d}t\\x&=-\left(C_0-\frac{\gamma+1}{4}J_-\right)t-X_-+g(J_-),\quad X_-=\frac{\gamma-3}{4}\int_{J_-=\text{const.}}J_+(x,t)\mathrm{d}t\end{aligned}\right\} \tag{2.4.13}$$

式中，$f(J_+)$和 $g(J_-)$为任意函数，或者改写为

$$J_+ = F\left(t - \frac{x - X_+}{C_0 + \frac{1}{2}\beta J_+}\right), \qquad J_- = G\left(t + \frac{x + X_-}{C_0 - \frac{1}{2}\beta J_-}\right) \tag{2.4.14}$$

式中, F, G 为其宗量的任意函数, (2.4.14)式表示黎曼-厄恩肖广义解, 当 $u = \pm\lambda$, 它们分别退化为简单波解。对于同一个声源, F, G 为沿不同特征线传播的两个波。如果声源是正弦波源, $u=A\sin\omega t$, 则有

$$J_+(x,t) = J_{+0}\sin\left(\omega t - \frac{\omega(x - X_+)}{C_0 + \frac{1}{2}\beta J_+(x,t)}\right), \qquad J_-(x,t) = J_{-0}\sin\left(\omega t + \frac{\omega(x + X_-)}{C_0 - \frac{1}{2}\beta J_-(x,t)}\right),$$

两端封闭的硬壁驻波管

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \tag{2.4.15}$$

式中, L 为管长。于是有

$$\begin{aligned} u = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = A\sin\left\{\omega t - \frac{\omega}{C_0 + \frac{1}{2}\beta J_+(x,t)}[x - X_+(x,t)]\right\} \\ + B\sin\left\{\omega t + \frac{\omega}{C_0 - \frac{1}{2}\beta J_-(x,t)}[x + X_-(x,t)]\right\} \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

将两端的边界条件代入上式, 便得到一个关于 J_{0+} 和 J_{0-} 的齐次方程组, 其解满足

$$\begin{aligned} &\sin\left\{\omega t + \frac{\omega}{C_0 + \frac{1}{2}\beta J_+(0,t)} X_+(0,t)\right\}\sin\left\{\omega t + \frac{\omega}{C_0 - \frac{1}{2}\beta J_-(L,t)}[L + X_-(L,t)]\right\} \\ &= \sin\left\{\omega t - \frac{\omega}{C_0 + \frac{1}{2}\beta J_+(L,t)}[L - X_+(L,t)]\right\}\sin\left\{\omega t + \frac{\omega}{C_0 - \frac{1}{2}\beta J_-(0,t)} X_-(0,t)\right\} \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

由方程(2.4.6)和边界条件(2.4.15)得到

$$J_{+}(0,t) = -J_{-}(0,t) = \lambda(0,t), \quad J_{+}(L,t) = -J_{-}(L,t) = \lambda(L,t) \tag{2.4.18}$$

再由方程(2.4.13)于是有

$$\begin{aligned} X_{+}(0,t) &= -\frac{\gamma-3}{4}\int_{J_{+}(0,t)=\text{const.}} J_{-}(0,t)\mathrm{d}t = \frac{\gamma-3}{4}\int_{\lambda(0,t)=\text{const.}} \lambda(0,t)\mathrm{d}t \\ &= X_{-}(0,t) \\ X_{+}(L,t) &= X_{-}(L,t) = \frac{\gamma-3}{4}\int_{\lambda(L,t)=\text{const.}} \lambda(L,t)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

将这些关系代入(2.4.17), 得

$$\begin{aligned} &\sin\left\{\omega t + \frac{\omega}{c_0 + \frac{\gamma+1}{4}\lambda(L,t)}\left[L + \frac{\gamma-3}{4}\int_{\lambda(L,t)=\text{const.}} \lambda(L,t)\mathrm{d}t\right]\right\} \\ = &\sin\left\{\omega t - \frac{\omega}{c_0 + \frac{\gamma+1}{4}\lambda(L,t)}\left[L - \frac{\gamma-3}{4}\int_{\lambda(L,t)=\text{const.}} \lambda(L,t)\mathrm{d}t\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

显然, 如果

$$\frac{\omega L}{c_0 + \frac{\gamma+1}{4}\lambda(L,t)} = n\pi, \quad n = 1,2,\cdots$$

或

$$L = L_0\left[1 + \frac{\gamma+1}{4c_0}\lambda(L,t)\right], \quad L_0 = \frac{1}{2}n\Lambda_a, \quad n = 1,2,\cdots \tag{2.4.21}$$

时, 则方程(2.4.20)成立, 即(2.4.21)式是方程(2.4.20)的解。式中 Λ_a 为声波波长, L_0 为理想驻波管的小振幅波的共振长度。对于理想气体的等熵过程, 有

$$L = L_0 \left\{ 1 + \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} \left[\left(\frac{p(L)}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] \right\}, \tag{2.4.22}$$

式中，p_0 为大气压力，$p(L)$ 为在 $x=L$ 处的全部压力。这个结果表明，有限振幅硬壁驻波管的共振长度长于小振幅情况下的共振长度。如声压为 160dB（参考级为 20 μPa)时，$L/L_0 = 1.002$；声压为 174 dB，$L/L_0 = 1.009$，当 $\gamma=1.4$。这一结果表明，尽管长度修正量很小，但当系统的 Q 值很高时，如果长度不匹配，则系统不共振，这对于某些实际场合的应用是需要考虑的[14]。

参 考 文 献

[1] Riemman B. The propagation of plane sound waves of finite amplitude.*In*: Beyer B T. Nonlinear acoustics in fluids. Brown University, Province Rhode Island,VNR Comp, 1984.42~60

[2] Earnshaw S. On the mathematical theory of sound. Phil Trans Roy Soc 1859, 8: 75~102; *In*: Lindsay R B. Benchmark paper in acoustics. Acoustics: Historical and Philosophical Development. Brown University, Province Rhode Island,Dowden Hutchinson & Ross, Inc, 291

[3] Rudenko O V, Soluyan S I. Theoretical foundations of nonlinear acoustics. New York : Consultants Bureau. 1977

[4] Гольдберг З А. Акустический уравнения второго приближения и распростанение плоских волн конечной амплитуды, Акуст *Ж*, 1956, 2: 325~328

[5] Андреев Н Н. О некоорых величини. Акуст *Ж*, 1955, 1: 1~11

[6] Merklinger H M. Fundamental-frequency component of a finite-amplitude plane wave. Jour Acoust Soc Am, 1973, 54: 1760, 1761

[7] Stephens R W B, Leventhall H G. Acoustics and vibration progress.Vol. 2. Chapman and Hall, 1976

[8] Зарембо Л К Н , Красилъников В А. Введение в hелинейную акустику. Москва; Излателъство Наука, 1966

[9] Blackstock D T. Connection between the Fay and Fubini solutions for plane sound waves of finite amplitude. Jour Acoust Soc Am, 1966, 39: 1019~1026

[10] 钱祖文. Riemann-Earnshaw 解的傅里叶分析. 声学学报, 2004, 29：80~83

[11] Maa D Y. Exact formulas of nonlinear stand waves. Chinese Phys Lett, 1990, 7: 222~225

[12] 钱祖文. 我国非线性声学方面的研究进展. 物理, 1999, 28：593~600

[13] Landau L D, Lifshitz E M.Feuid mechanics. 2nd ed. 北京：世界图书出版公司, 1998

[14] Swift G W. Thermoacoustic engines. Jour Acoust Soc Am, 1988, 84: 1145~1180

第3章 冲 击 波

第2章的结果告诉我们，理想流体中的有限振幅正弦波传播到$\sigma \geqslant 1$的距离后，就会形成冲击波，在这种情况下，不能应用贝塞尔-富比尼解。当然，绝对的理想流体在自然界是不存在的，只是当声雷诺数Re较大时，从(1.8.4)式可以看出，运动的非线性效应大大地超过了小振幅耗散效应。事实上，由于非线性效应，一部分基波能量转移到谐波及其他频率的波的成分上去，从而使基波遭到有限振幅的附加衰减。另外，要想使谐波在$Re>>1$的情况下有积累，还必须满足下述条件，即由于非线性效应产生的谐波增加远大于由于谐波衰减所引起的谐波减少，这才有可能使谐波有“积蓄”，从而有可能产生陡峭的冲击波。如果$Re \geqslant 1$，则两种效应可以比较，因此谐波积累得很缓慢，在这种情况即使能形成冲击波，其波阵面亦不陡峭。当$Re<1$时，谐波没有积累，因而形不成冲击波。在本章范围内，只讨论能够形成冲击波的情况。

涉及冲击波传播特性的研究有两个内容需要介绍：第一个内容是将实际的无频散非线性方程组化成伯格斯(Burgers)方程，再用霍普(Hopf)-科尔(Cole)变换进一步化为热传导型方程求解，因为后一方程的解在数学物理方程中是熟知的；第二个内容是将冲击波波形理想化为陡峭的锯齿波形，在陡峭面两侧应用质量、动量和能量守恒条件，即所谓兰金-于戈尼奥理论，下面先讨论后一种理论，而前一种方法留待第4章讨论。

3.1 间断面的连接条件——兰金-于戈尼奥关系[1~4]

这里将冲击波面当作严格的锯齿波形，即形成理想的间断面，当然，这种间断面在实际上固然不存在，即使存在，它在理论上也是不能成立的。因为任何一个物理量若在时间轴上或空间轴上出现第一类间断点(即间断量为有限量的间断点)，则它对时间或空间的变化率(导数)将为无限大量。亦即是说，其导数不存在，于是在间断面附近，与问题有关的微分方程(如运动方程，连续性方程等)就不成立，因为它们是在一切物理量及其导数都存在的条件下推导出来的。但对于实际介质来说，总是存在黏滞或热传导等耗散过程，在3.4节将表明，如果介质不是理想的，这时的冲击波阵面将有一定厚度，尽管这一厚度只是介质分子平均自由程的量级，只要它不为零，则一切有关物理量及其导数就有了定义。另外，由于分子自由程与声波波长比较可以忽略不计，因此可以近似地认为它是间断面，因而兰金-于戈尼奥关系的假设前提是近似成立的。

假设介质中存在一个稳定的间断面，在该面的两侧，质点速度、密度和压力等物理量有跳跃，而且这种间断面也以一定的速度相对于静止坐标系运动(如无限延伸的锯齿波间断面即是以小振幅声速 C_0 传播)，我们将坐标系取在间断面上，即在这个坐标系中，间断面是静止的。为简单起见，仅讨论所谓正冲击波，即认为流体运动的方向垂直于间断面(否则称为斜冲击波，这里不讨论)，于是 u 的方向垂直于该面，不管流体质点如何运动，该面上的质量流必须连续，即

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2 \tag{3.1.1}$$

式中，下标号“1”和“2”的量分别为间断面两侧的物理量。此外，由动量流和能量流连续分别得到

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2 \tag{3.1.2}$$

以及

$$\rho_1 u_1 \left(H_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) = \rho_2 u_2 \left(H_2 + \frac{u_2^2}{2} \right)$$

由(3.1.1)式，上式可简化为

$$H_1 + \frac{u_1^2}{2} = H_2 + \frac{u_2^2}{2} \tag{3.1.3}$$

式中，H 为单位质量流体的焓，从(3.1.1)式和(3.1.2)式中解出 u_1，u_2 代入(3.1.3)式，得到

$$H_1 - H_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)(P_2 - P_1) = 0 \tag{3.1.4}$$

(3.1.1)式~(3.1.3)式称为兰金-于戈尼奥关系(R−H 关系)，它描写了在间断面两侧热力学量值之间的关系，下面我们将应用这一关系来研究间断面两侧的熵跳跃和压力跳跃之间的关系，从而研究冲击绝热条件。

我们假设某物理量在间断面的跳跃比它的平衡量小，即

$$P_1 - P_2 < P_0$$
$$S_1 - S_2 < S_0$$

令

$$\varDelta_P = \frac{P_1 - P_2}{P_0}$$

$$\varDelta_S = \frac{S_1 - S_2}{S_0}$$

将(3.1.4)式展成$\varDelta_P$, $\varDelta_S$的级数，于是有

$$H_1 - H_2 = \left(\frac{\partial H}{\partial \varDelta_P}\right)_S \varDelta_P + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varDelta_P^2}\right)_S \varDelta_P^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 H}{\partial \varDelta_P^3}\right)_S \varDelta_P^3 + \cdots + \left(\frac{\partial H}{\partial \varDelta_S}\right)_P \varDelta_S + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varDelta_S^2}\right)_P \varDelta_S^2 + \cdots$$

由(1.9.4)式可知

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \varDelta_P}\right)_S = P_0\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S = P_0\frac{1}{\rho_2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varDelta_P^2}\right)_S = P_0^2\left[\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_{S,\rho=\rho_2}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \varDelta_S}\right)_P = S_0\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P = T_2 S_0$$

$$\cdots\cdots$$

于是有

$$H_1 - H_2 = \frac{P_0}{\rho_2}\varDelta_P + \frac{1}{2}P_0^2\left[\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_{S,\rho=\rho_2}\varDelta_P^2 + \frac{P_0^3}{6}\left[\frac{\partial^2}{\partial P^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_{S,\rho=\rho_2}\varDelta_P^3 + \cdots + T_2 S_0 \varDelta_S + \frac{S_0^2}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_P \varDelta_S^2 + \cdots$$

同理，根据类似的热力学关系容易得到

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}+\frac{2}{\rho_2}=\frac{2}{\rho_2}+\left[\frac{\partial}{\partial \varDelta_P}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_S \varDelta_P+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial \varDelta_P^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_S \varDelta_P^2+\cdots$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial \varDelta_S}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_P \varDelta_S+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial \varDelta_S^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_P \varDelta_S^2+\cdots$$

以及

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varDelta_P}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_S=P_0\left[\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_S$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \varDelta_P^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_S=P_0^2\left[\frac{\partial^2}{\partial P^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_S$$

再由(1.9.15)式，有

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varDelta_S}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_P=S_0\left(\frac{\partial \tau}{\partial S}\right)_P=S_0\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S=S_0\frac{T_2\alpha_2}{\rho_2 C_{P2}}$$

式中，α_2 是标号为“2”这一侧的膨胀系数，C_{P2} 为这一侧的定压比热。将这些展开式代入(3.1.4)式，可以得到

$$T_2 S_0 \varDelta_S+O(\varDelta_S \varDelta_P)=\frac{1}{12}P_0^3\left[\frac{\partial^2}{\partial P^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_S \varDelta_P^3$$

式中，等号左端第二项为 $\varDelta_S\varDelta_P$ 的乘积项，从这个式子的左右端比较可知，$\varDelta_S$ 为三阶小量，因为右端是三阶小量，于是可以知道 $\varDelta_S\varDelta_P$ 为四阶小量，从而将它略去，这样就能够得出冲击波间断面两侧熵跳跃与压力跳跃的关系，即

$$S_1-S_2=\frac{1}{12T_2}\left[\frac{\partial^2}{\partial P^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_{S,\rho=\rho_2}(P_1-P_2)^3 \tag{3.1.5}$$

这一重要结果告诉我们，如果(P_1-P_2)是一阶小量时，则熵的跳跃是三阶小量，故在弱间断(P_1-P_2 很小)的情况下，就可以近似认为声学过程是绝热的，但对于跳跃量很大的冲击波(强冲击波)，间断面两侧的熵跳跃的增加是非常快的，最终将使得绝热过程的近似不再成立。

3.2 冲击波的形成距离

在(2.3.2)式中，我们定义了平面正弦波的冲击波形成距离，这里进一步用几何图形来导出这个结果。

设在$t=0$时刻，任意波形(图3.1)上两点的坐标之差为δx，这两点相应的质点速度差为δu，在t时刻，这个波形向前传播，由于各点的质点速度不同，故相应的传播速度也不同，于是这两个点的坐标差由 δx 变为$\delta x'$，从(2.1.13)式可知，这两个点的传播速度差为$\beta\delta u$，忽略δu和$\delta u'$的差别，于是有

$$\delta x' = \delta x - \beta\delta u \cdot t \tag{3.2.1}$$

上式右端取减号是因为，冲击波是在速度值大的点追上速度值小的点的条件下形成的，故δx与δu反号。当冲击波形成时，出现陡峭的间断面，这意味着$\delta x'=0$，令这时的$t=t_s$，从(3.2.1)式可以得到

$$t_s = \frac{1}{\beta\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{\mathrm{m}}} \tag{3.2.2}$$

式中，$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{\mathrm{m}}$ 的下标m为最大值的意思，t_s为形成冲击波所需要的最短时间，对于正弦波而言$u=u_0\sin(\omega t-kx)$，$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_{\mathrm{m}}=u_0k$，故正弦波的冲击波形成距离是

$$x_s = C_0 t_s = \frac{C_0}{\beta u_0 k} = (\beta Mak)^{-1} \tag{3.2.3}$$

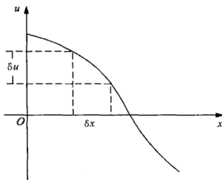


图3.1 任意波形上两点的u与x的关系图

这与(2.3.2)式的结果完全一致，这里的正弦波是连续波，间断面的传播速度为 C_0。

3.3　弱冲击波理论[5~9]

根据以前的讨论可知，当 $\sigma \geqslant 1$ 时，简单波在传播过程中发展为冲击波，冲击波一旦形成之后，有两个问题需要考虑：第一，形成冲击波之后，在间断面附近波形的导数$\left(\text{如}\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial T}{\partial x}\text{等}\right)$趋向无限大，因而在此邻域内伴随着很大的耗散；第二，由于在间断面上某些物理量有跃变，使得从后面追上来的波在这里产生反射，致使简单波假设不能成立，从而破坏了黎曼-厄恩肖解可以应用的前提。因此，尽管这个解是严格解，由于它是在假设(2.1.3)的基础上得到的，故其实际有效应用范围是 $\sigma<1$，在二级近似下，它是贝塞尔-富比尼解，在 $\sigma \geqslant 1$ 时，在间断面两侧物理量之间的关系服从 R-H 关系，剩下来的任务是怎样才能知道远离间断面的地方的运动情况。当然，解决这个问题最严谨的方法是通过行波变换将方程组化为伯格斯方程求解，这样做的缺点是数学上比较冗长，将把它放到第 4 章去讨论，本章先研究所谓弱冲击波理论。

当 *Ma* 很小，如小于 0.1 时，可以近似地认为间断面上的反射很小，从而可以略去它，于是在间断面以外的波形连续部分，可以用简单波的解来近似，而在间断面附近，则采用 R-H 连接关系。此外，在传播过程中仍旧是避免产生多值波形，这就间接考虑了衰减的影响。上述这些观点即为弱冲击波理论的出发点。

设冲击波形成的时刻和地点分别用 $\bar{t}$ 和 $\bar{x}$ 表示，则在以后的 t_s 时刻它传播到 x 点，于是有

$$t_s=\bar{t}+\int_{\bar{x}}^{x}\frac{1}{U_s}\mathrm{d}x \tag{3.3.1}$$

式中，U_s，为间断面相对于固定坐标系的运动速度，下面仅考虑向一个方向传播的波。从(2.2.6)式可以知道 U_s，并将它代入上式，准确到二阶量可得

$$t_s'=\bar{t}'-\frac{1}{2}\beta C_0^{-2}\int_{\bar{x}}^{x}(u_1+u_2)\mathrm{d}x \tag{3.3.2}$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}t_s'}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2}\beta C_0^{-2}(u_1+u_2) \tag{3.3.3}$$

式中

$$t_s' = t_s - \frac{x}{C_0}$$

$$\bar{t}' = \bar{t} - \frac{\bar{x}}{C_0}$$

另一方面，从(2.1.11)式可知，在二级近似下，简单波的一般形式可表为

$$u = \Phi\left(t - \frac{x}{C_0} + \beta C_0^{-2} ux\right) \tag{3.3.4}$$

或者写成

$$t' = \Phi^{-1}(u) - \beta C_0^{-2} xu \tag{3.3.5}$$

因而在间断面的两侧邻域分别为

$$t_s' = \Phi^{-1}(u_1) - \beta C_0^{-2} xu_1 \tag{3.3.6}$$

$$t_s' = \Phi^{-1}(u_2) - \beta C_0^{-2} xu_2 \tag{3.3.7}$$

将(3.3.3)式与(2.1.10)式比较可见，如果应用(2.1.14)式并取二级近似，只要将简单波解中的 u 代之以 $\frac{1}{2}(u_1+u_2)$，即可以得到弱冲击波的理论结果。

从(3.3.6)式、(3.3.7)式以及(3.3.2)式或者(3.3.3)式可以解出 t_s', u_1, u_2，因而可以求出在 t_s 时刻间断面的位置和该面两侧的质点速度值，这几个式子就构成了弱冲击波理论的数学公式，下面举几个例子来说明这个理论的应用。

例 1　N 波

与无限延伸的锯齿波不同，N 波是一种只有单个周期的锯齿脉冲冲击波，也许是由于其形状有点像大写英文字母 N，故称为 N 波。显然，N 波与无限锯齿波的区别除了上述的周期数目之外，还有间断面的跳跃度的不同，后者的跳跃量是前者的二倍，即后者是从 $-u_0$ 到 u_0，而前者却不然，如它从 0 到 $-u_0$(在 $t>0$ 时)，由(2.2.6)式可知，后者的间断面传播速度 C_0 是常数，而前者则不是常数，由此可见，不像无限锯齿波，N 波的两个间断面之间距离随着传播过程而变化(拉长)。

设在 $x=0$ 处有一个初始扰动，其时间波形是：除了在 $t=\pm\bar{t}$ 时形成间断面以外，其他时刻速度与时间的关系为(图 3.2)

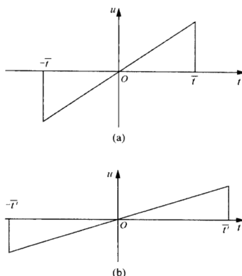


图 3.2　N 波的演变

$$u(0, t) = u_0 \frac{t}{\bar{t}} \tag{3.3.8}$$

t 满足

$$-\bar{t} < t < \bar{t}$$

式中，$\bar{t}$ 为冲击波的形成时刻，当 $x > 0$ 处，质点速度为

$$u(x, \varphi) = \frac{u_0 \varphi}{\bar{t}} \tag{3.3.9}$$

因为假设不在间断面处，简单波理论是可以应用的，从(3.3.4)式可知，当 $\beta = 0$(线性声学)，波的“行波”变量为 $t' = t - \dfrac{x}{C_0}$，因此，在非线性问题中的“行波”(简单波)变量应为(在二级近似下)

$$\varphi = t' + \beta C_0^{-2} x \Phi(\varphi)$$

将(3.3.9)式代入上式解之，得到

$$\varphi = \frac{t'}{1 + bx}$$

式中

$$b=\frac{\beta u_0}{C_0^2 \bar{t}}=\beta Mak \tag{3.3.10}$$

再将φ的表达式代入(3.3.9)式，得到

$$u(x,\varphi)=\Phi(\varphi)=\frac{u_0}{\bar{t}}\frac{t'}{1+bx} \tag{3.3.11}$$

$$-t_s'<t'<t_s'$$

我们现在研究图3.2(b)中的间断面，显然，这时 $u_1\neq 0, u_2=0$，应用(3.3.3)式和(3.3.11)式，容易得到

$$\frac{\mathrm{d}t_s'}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{2}bt_s'}{1+bx}$$

将它对t_s'积分一次得到

$$t_s'=\bar{t}(1+bx)^{1/2} \tag{3.3.12}$$

在得到上式时，应用了边界条件：$x=0$，$t_s'=t_s$，从而定出积分常数。将(3.3.12)式代入(3.3.11)式，考虑到$t'=t_s'$时，$u=u_1$，于是得到

$$u_1=\frac{u_0}{(1+bx)^{1/2}} \tag{3.3.13}$$

由最后得到的两个式子可以清楚地看到，当x很大时随着传播距离的增大，N波的间断幅度随$x^{1/2}$的规律衰减，脉冲的宽度则按$x^{1/2}$的增大而拉长。当$x=C_0t$时，结果与(2.2.10)式和(2.2.11)式完全相同，这一点也说明弱冲击波理论处理这一问题的可行性。

例2 由正弦波发展起来的锯齿波。

当声源做正弦振动时，介质中有限振幅波的黎曼-厄恩肖解为

$$u=u_0\sin\Phi$$

$$\Phi=\omega t-kx+\sigma\sin\Phi=y+\sigma\sin\Phi$$

令

$$\frac{u}{u_0}=U,\quad \omega t-kx=y$$

代入上式得到

$$y = \Phi - \sigma\sin\Phi = \arcsin U - \sigma U \tag{3.3.14}$$

根据弱冲击理论得到

$$\frac{\mathrm{d}y_s}{\mathrm{d}\sigma} = -\frac{1}{2}(U_1 + U_2) \tag{3.3.15}$$

$$y_{s1} = \arcsin U_1 - \sigma U_1 \tag{3.3.16}$$

$$y_{s2} = \arcsin U_2 - \sigma U_2 \tag{3.3.17}$$

因为在间断面上，$U_1 = -U_2$，由(3.3.15)式可知，其右端为零，故 y_s 不随距离变化，即相邻间断面之间的距离在传播过程中保持常数。由于波形是无限延伸的周期重复，故只要讨论一段(一个周期)就够了，如讨论$-\pi < y < \pi$，并选取某个间断面所在的点为坐标原点，即取 y_s=0，于是有

$$U_1 = \sin(\sigma U_1) \tag{3.3.18}$$

为了研究上式的解，令 $\sigma U_1 = x$，代入(3.3.18)式得

$$\frac{1}{\sigma}x - \sin x = 0$$

由这个式子可知，$\sigma \geqslant 1$ 时才有解。用作图法求根，即令

$$y_1 = \sin x, \quad y_2 = \frac{1}{\sigma}x$$

图3.3表示了作图求根法的图形，图中y_1是正弦曲线，y_2是直线，后者的斜率为$1/\sigma$，σ 越大，则斜率越小，两条曲线的交点即为方程(3.3.18)的根。图 3.3 表明，它有两个根，一个是$x = x_1 = 0$，另一个是$x = x_2$。当$\sigma \gg 1$时，x_2越来越接近于π，即当$\sigma \gg 1$时，$\sigma U_1 \approx \pi$，于是可以令

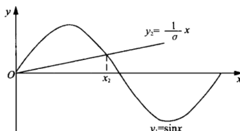


图 3.3 作图求根

$$\sigma U_1 = \pi - \delta$$

δ 为小量，代入(3.3.18)式可得

$$U_1 = \sin(\pi - \delta) = \sin\delta \approx \delta$$

于是有

$$U_1 = \frac{\pi}{1+\sigma} \tag{3.3.19}$$

由此可见，当正弦波已经充分发展为成熟的锯齿波之后，其间断幅度随距离的衰减关系服从(3.3.19)式，这与第 2 章的结果完全一致。

值得再提一下，(3.3.19)式只是在 $\sigma \gg 1$ 时成立，当 $\sigma \geqslant 1$ 的一般情形时，利用

$$\frac{\sin x}{x} = \mathrm{j}_0(x)$$

代入(3.3.18)式可得

$$\sigma U_1 = \mathrm{j}_0^{-1}\left(\frac{1}{\sigma}\right) \tag{3.3.20}$$

式中，$\mathrm{j}_0(x)$为零阶球贝塞尔函数，$\mathrm{j}_0^{-1}(x)$表示与它对应的反函数，借助于贝塞尔函数表，利用(3.3.20)式可以做出 U_1 与 σ 的曲线，从而得到冲击波间断幅度 U_1 与距离的关系，图 3.4 描出了这条曲线(实线)，为了比较，近似式(3.3.19)U_1 与 σ 的关系也作在图上(虚线)。两条曲线比较可知，当 σ >3.6 时，使用(3.3.19)式所带来的误差不会超过 2%。

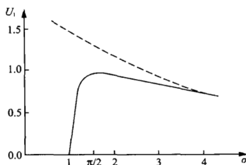


图 3.4 U_1 与 σ 的关系

3.4 冲击波的宽度[4]

从上面的讨论可知，冲击波理论简明扼要，很易得出结果，但该理论假设冲击波具有一个跳跃的间断面，即认为间断面是一个无限陡峭的面，这种假设只有在理想介质中才能成立。但实际上介质总是存在能量耗散，致使这种间断面不可能很陡峭，亦即是某物理量产生一个有限的变化不是发生在一个面上，而是发生在一个薄层之内，这个层的厚度亦称为冲击波间断层的厚度。

由于实际介质的间断面实为一个间断层，因此，R–H 关系必须重新讨论。在本章开始部分，根据间断面两侧的流体在跨过这个面时它的质量、动量及能量要守恒，而对于实际介质来说，应改为穿过间断层的质量流、冲量流及能量流都要连接，根据这个原则，可以将间断面两侧的 R–H 关系推广到间断层的两侧。

对于质量流来说，两者的形式相同，因为介质的耗散不直接影响质量流。如果用字母 j 表示质量流，则有

$$j=\rho u=\text{常数} \tag{3.4.1}$$

这个式子实为(3.1.1)式在间断层两侧的改写。对于冲量流的形式则有所更动，因为必须考虑黏滞应力的影响。由(1.4.6)式可知，黏滞应力可表为

$$(2\mu+\mu')\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

于是冲量流守恒可以写成

$$P+\rho u^2-(2\mu+u')\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\text{常数}$$

式中，ρ 为介质密度，u 为垂直于间断层的速度，μ 和 μ' 分别为介质的第一和第二黏滞系数，P 为压力，用 τ 表示比容，即密度的倒数，于是有 $u=j\tau$，由于在层上 j=常数，故有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=j\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}$$

于是冲量流守恒方程可以改写为

$$P+j\tau-j(2\mu+u')\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}=\text{常数}$$

在离间断层很远的地方，热力学量和声学量几乎与 x 无关，如在冲击波的前方较远处(这里的物理量用下标“1”表示)，$\frac{\mathrm{d}\tau_1}{\mathrm{d}x}=0$，将这个结果代入上式，可以定出其右端的常数等于 $P_1+j\tau_1$，于是上式可写为

$$P-P_1+j^2(\tau-\tau_1)-(2\mu+\mu')j\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}=0 \tag{3.4.2}$$

关于能量流守恒可以这样来考虑，热传导引起的能量流为

$$-\kappa\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

黏滞摩擦引起的能量流为

$$-(2\mu+\mu')\,u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

于是能量流守恒关系可表示为

$$\rho u\left(H+\frac{u^2}{2}\right)-(2\mu+\mu')u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\kappa\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=\text{常数}$$

式中，κ 为热传导系数，T 为绝对温度，用类似的方法可以定出上式右端的常数，最终上式可以写为

$$H+\frac{1}{2}j^2\tau^2-j(2\mu+\mu')\tau\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}-\frac{\kappa}{j}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=H_1+\frac{1}{2}j^2\tau_1^2 \tag{3.4.3}$$

下面只讨论跃变量很小的冲击波，即弱冲击波，这时层内外的差值与平衡值比较很小，即 $\tau-\tau_1, P-P_1$ 等与 τ_0, P_0 比较很小，故可展开

$$\tau-\tau_1=\left(\frac{\partial\tau}{\partial P}\right)_{S_1}(P-P_1)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial P^2}\right)_{S_1}(P-P_1)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial S}\right)_{P_1}(S-S_1)$$

上式各个展开系数分别是在 $S=S_1$, $P=P_1$ 处取值，将这个结果代入(3.4.2)式，容易得到

$$\left[1+\left(\frac{\partial\tau}{\partial P}\right)_{S_1}j^2\right](P-P_1)+\frac{1}{2}j^2\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial P^2}\right)_{S_1}(P-P_1)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial S}\right)_{P_1}j^2(S-S_1)$$
$$=(2\mu+\mu')j\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}$$

而

$$\frac{d\tau}{dx}=\left(\frac{\partial\tau}{\partial P}\right)_S\frac{dP}{dx}+\left(\frac{\partial\tau}{\partial S}\right)_P\frac{dS}{dx}\approx\left(\frac{\partial\tau}{\partial P}\right)_S\frac{dP}{dx}$$

因为是弱冲击波，故在上式中认为熵变化是高阶小量而被忽略，将这个关系代入前一式子，可以得到

$$\begin{aligned}&\left[1+\left(\frac{\partial\tau}{\partial P}\right)_{S_1}j^2\right](P-P_1)+\frac{j^2}{2}\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial P^2}\right)_{S_1}(P-P_1)^2+\left(\frac{\partial\tau}{\partial S}\right)_{P_1}(S-S_1)j^2\\&=(2\mu+\mu')\left(\frac{\partial\tau}{\partial P}\right)_{S_1}\frac{dP}{dx}j\end{aligned}\tag{3.4.4}$$

用$\frac{1}{2}(\tau+\tau_1)$乘以(3.4.2)式得到一个方程式，然后再由(3.4.3)式中减去这个式子，便有

$$H-H_1-\frac{1}{2}(P-P_1)(\tau+\tau_1)-\frac{1}{2}j(2\mu+\mu')(\tau-\tau_1)\frac{d\tau}{dx}-\frac{\kappa}{j}\frac{dT}{dx}=0$$

在弱冲击波的情况下，$(\tau-\tau_1)$是一阶小量，于是

$$\frac{d\tau}{dx}=\frac{d(\tau-\tau_1)}{dx}\sim\frac{\tau-\tau_1}{\delta}$$

式中，δ 为间断层厚度的量级，下面将可看到，在跃变很小的情况下，δ^{-1} 是一阶小量，故$\frac{d\tau}{dx}$为二阶小量，于是上式中的第三项是三阶小量，可以将它略去，这样上式可以写成

$$H-H_1-\frac{1}{2}(P-P_1)(\tau+\tau_1)-\frac{\kappa}{j}\frac{dT}{dx}=0$$

在上式中如果使$\frac{dT}{dx}=0$，即可化为(3.1.4)式。将此式按$(P-P_1)$, $(S-S_1)$展开，类似于前面(3.1.4)式和(3.1.5)式之间的计算过程，准确到二阶量，上式可以简化为

$$T(S-S_2)=\frac{\kappa}{j}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S_1}\frac{dP}{dx}\tag{3.4.5}$$

将(3.4.5)式代入(3.4.4)式，于是有

$$\frac{1}{2}j^2\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial P^2}\right)_{S_1}(P-P_1)^2+\left[1+\left(\frac{\partial\tau}{\partial P}\right)_{S_1}j^2\right](P-P_1)$$

$$=\left\{-\frac{\kappa}{T}\left(\frac{\partial\tau}{\partial S}\right)_{P_1}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S_1}+(2\mu+\mu')\left(\frac{\partial\tau}{\partial P}\right)_{S_1}\right\}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}j \tag{3.4.6}$$

式中，左端为 P 的二次三项式，在弱冲击波的情况下，在远离间断层的地方，已经知道 $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$ 是二阶小量，因此，在这些地方(3.4.6)式右端趋于零，要想使左端亦为零，则左端必须有下述形式，即

$$\frac{j^2}{2}\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial P^2}\right)_{S_1}(P-P_1)(P-P_2)$$

式中，P_1 和 P_2 是使(3.4.6)式左端为零的两个根，系数

$$\frac{1}{2}j^2\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial P^2}\right)_{S_1}$$

是根据(3.4.6)式定出来的，下面将可以看出，P_1 和 P_2 近似地为间断层两侧的压力。现在回到(3.4.6)式，显然它的左端仍可用上述分解因子的形式表示，而它的右端仍为原式的右端，即

$$\frac{1}{2}j^2\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial P^2}\right)_{S_1}(P-P_1)(P-P_2)=\left\{(2\mu+\mu')\left(\frac{\partial\tau}{\partial P}\right)_{S_1}-\frac{\kappa}{T}\left(\frac{\partial\tau}{\partial S}\right)_{P_1}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S_1}\right\}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}j \tag{3.4.7}$$

由于

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}P}\right)_S=\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_S=-\frac{1}{\rho^2C^2}$$

利用热力学关系(1.9.6)式和(1.9.12)式有

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial S}\right)_P=\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S^2=\frac{T\tau^2}{C^2}\left(\frac{1}{C_V}-\frac{1}{C_P}\right)$$

将这些关系代入(3.4.7)式容易得到

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2}j\frac{C^2}{b\tau^2}\left(\frac{\partial^2\tau}{\partial P^2}\right)_{S_1}(P-P_1)(P-P_2) \tag{3.4.8}$$

式中

$$b=\mu'+2\mu+\kappa\left(\frac{1}{C_V}-\frac{1}{C_P}\right)$$

由(3.4.1)式和(3.4.2)式可知，$j=\dfrac{u_1}{\tau_1}=\dfrac{u_2}{\tau_2}$，$P_1+j^2\tau_1\approx P_2+j^2\tau_2$，解得

$$j=\sqrt{\frac{P_2-P_1}{\tau_1-\tau_2}} \tag{3.4.9}$$

这里应用(3.4.2)式时忽略了黏滞应力对冲量流的贡献。此外，由于

$$\tau_2-\tau_1\approx\left(\frac{\partial\tau}{\partial P}\right)_S(P_2-P_1)$$

于是有

$$j\approx\sqrt{-\left(\frac{\partial P}{\partial\tau}\right)_S}=\frac{C}{\tau} \tag{3.4.10}$$

代入(3.4.8)式可得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=-\frac{C^3}{2b\tau^3}\left[\frac{\partial^2\tau}{\partial P^2}\right]_{S_1}(P-P_1)(P-P_2) \tag{3.4.11}$$

将上式积分可得

$$x=\frac{2b\tau^3}{\dfrac{P_2-P_1}{2}\left(\dfrac{\partial^2\tau}{\partial p^2}\right)_{S_1}C^3}\operatorname{artanh}\left(\frac{P-\dfrac{P_1+P_2}{2}}{\dfrac{P_2-P_1}{2}}\right)+\text{const.}$$

或者

$$P = \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{2} \tanh\left(\frac{x}{\delta}\right) \tag{3.4.12}$$

式中

$$\delta = \frac{4b\tau^3}{(P_2 - P_1)\left[\dfrac{\partial^2 \tau}{\partial P^2}\right]_{S_1} C^3} \tag{3.4.13}$$

从所得到的解可知，压力 P 从 P_1 变到 P_2 主要发生在 δ 量级的距离内，故将 δ 称作冲击波间断层的厚度，显然，P_2-P_1 越小，则 δ 越大，反之 P_2-P_1 越大，即跃变值越大，则间断层厚度越薄。从这个结果可知，弱冲击波理论将间断层当作无限薄的陡峭面，则要求 P_2-P_1 趋向无限大，这一点又与弱冲击波理论本身相矛盾，因为这种理论假设间断幅度不能太大，这就与要求冲击波阵面无限陡峭发生冲突，故理论有一定的误差。

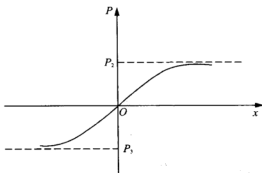


图 3.5　冲击波间断层厚度的示意图

3.5　弱冲击波理论的应用限制[10]

除了存在要求间断层无限薄及要间断幅度不能太大的矛盾以外，弱冲击波理论的应用还受到距离的限制。当距离很大时，冲击波按 $1/\sigma$ 的规律衰减，因而各阶谐波也是以 $1/\sigma$ 随距离衰减的，但当距离进一步增加时，使得介质的吸收(指数型的)与冲击波衰减可以比较时，弱冲击波的间断就会逐渐消失，因此，这个距离即为这种理论的应用上限，现在来求出这个上限。

设这个距离为 x_m，而对应的 σ 为 σ_m，在这里的基波振幅为 B_1，于是

$$B_1^{(\mathrm{F})}(\sigma_{\mathrm{m}})=\frac{2}{1+\sigma_{\mathrm{m}}} \tag{3.5.1}$$

在 $\sigma_m+\Delta\sigma$ 处，有

$$B_1^{(\mathrm{F})}(\sigma_{\mathrm{m}}+\Delta\sigma)=\frac{2}{1+\sigma_{\mathrm{m}}+\Delta\sigma} \tag{3.5.2}$$

故冲击波随距离的变化率为

$$-\left(\frac{\Delta B_1}{\Delta\sigma}\right)_{\mathrm{F}}=\frac{2}{(1+\sigma_{\mathrm{m}})(1+\sigma_{\mathrm{m}}+\Delta\sigma)} \tag{3.5.3}$$

式中，上、下标“F”为冲击波已经形成的意思(如 $\sigma>3.6$)。另外由于吸收引起的衰减可表为

$$B_1^{(\alpha)}(\sigma_{\mathrm{m}}+\Delta\sigma)\approx\frac{2}{1+\sigma_{\mathrm{m}}}\mathrm{e}^{-\alpha\Delta x} \tag{3.5.4}$$

以及

$$-\left(\frac{\Delta B_1}{\Delta\sigma}\right)_{\alpha}\approx-\frac{2}{1+\sigma_{\mathrm{m}}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\alpha\Delta x}-1}{\Delta\sigma}\right]\approx\frac{2}{(1+\sigma_{\mathrm{m}})}\frac{\alpha}{\beta kMa} \tag{3.5.5}$$

其中应用了关系

$$\Delta\sigma=\beta kMa\Delta x$$

使(3.5.3)式与(3.5.5)式相等，并令 $\Delta\sigma\to0$，令这时的 σ_m 或 x_m 分别为 σ_{max} 和 x_{max}，于是有

$$1+\sigma_{\max}=\frac{\beta kMa}{\alpha} \tag{3.5.6}$$

由于 $\sigma_{max}\gg1$，故有

$$x_{\max}\approx\frac{1}{\alpha} \tag{3.5.7}$$

由此可见，弱冲击理论只在

$$X_s<x<\frac{1}{\alpha}$$

范围内成立，当$x > \frac{1}{\alpha}$，锯齿波逐渐形成小信号正弦波，在第4章将可知道，这时波进入了所谓老年区。

3.6 关于有限振幅波衰减问题的后记

一个有限振幅正弦式的初始扰动在介质中传播，波形逐渐变化，当雷诺数足够大时，能够形成冲击波。这里存在一个不甚明了的现象，对于冲击波来说，即使介质不存在耗散，冲击波的振幅随距离之增大而衰减，这似乎是一个不好理解的问题。实际上，有限振幅波在理想介质中的衰减是由于低阶波的能量不断向高限波转移所至，因而在传播过程中，阶数为有限数的谐波的振幅总是在减小，并且无一例外，在稳定时，其相对减小的比例是一定的。因此，可以认为，由于有限阶谐波的能量不断向无限阶谐波转移，导致了理想介质中的有限振幅波的衰减。

参 考 文 献

[1] Rankine W J M. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance.*In*: Beyer B T. Nonlinear acoustics in fluids. New York: Brown University, VNR Comp, 1984. 65~76

[2] Hugoniot H. Memoir on the propagation of motion in bodies , especially in a perfect gas. *In*: Beyer B T. Nonlinear acoustics in fluids.New York: Brown University, VNR Comp, 1984. 77~89

[3] 库尔P 等.水下爆炸. 罗耀杰等译. 北京：国防工业出版社, 1960

[4] Landau L D, Lifshitz E M. Fluid mechanics. Vol. 6. Course of theoretical physics. New York: Pergamon Press, 1959

[5] Dnmond J W M, Cohen E R, Panofsky W K H, et al. A determination of the wave forms and laws of propagation and dissipation of ballistic shock waves. Jour Acoust Soc Am, 1946, 18: 97~118

[6] Oncley P B, Dunn D C. Frequency spectrum of N waves with finite rise time. Jour Acoust Soc Am, 1968, 43: 889, 890

[7] Smith R T, Bjorno L, Stephens R W B. Weak shock propagation in liquid-filled tubes. Acustica, 1978, 39: 123~129

[8] Temkin S. Propagation and stand in sawtooth waves. Jour Acoust Soc Am, 1969, 45: 224~227

[9] Blackstock D T. Normal reflection of finite amplitude plane waves from a rigid wall.*In*: Cremer L. Proc 3rd ICA. Stuttgart, 1959. 309~311

[10] Blackstock D T. Connection between the Fay and Fubini solutions for plane sound waves of finite amplitude. Jour Acoust Soc Am, 1966, 39: 1019~1026

第 4 章　无界黏热流体中的有限振幅平面波

在前几章我们首先讨论了理想介质中的有限振幅波传播，在这种介质中，一列正弦波在它的传播过程中会变成冲击波，随着冲击波的形成，波的能量将受到极大的衰减。当考虑到介质的黏滞热传导效应时，原来在理想介质中是陡峭的间断面，在这种情况下，要用一个一定厚度的间断层来代替，从(3.4.13)式可知，黏滞系数和热传导系数越大，间断层的厚度就越大。因此，如果一列有限振幅正弦波在这种介质中传播，只有当它的雷诺数足够大时，才能形成陡峭的冲击波，从而使得冲击波理论获得理想的应用效果；但当它的雷诺数不是很大，亦即是说，流体的耗散特性不能忽略时，陡峭的间断面就形不成，这时应用冲击波理论就会带来一定的误差，从而要用更完善的理论来代替。本章考虑流体具有黏滞性(第一黏滞性和第二黏滞性)和热传导性，暂时不考虑介质频散特性和弛豫过程，将流体力学方程组通过伴随坐标变换，在二级近似下化成著名的伯格斯方程，再用熟知的科尔-霍普变换，将其化归热传导方程求解。

4.1　伯格斯方程[1]

对于黏滞热传导介质，在第 1 章的(1.9.19)式中我们得到了修正的物态方程：

$$P = P_0 + C_0^2 \rho' + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0} \rho'^2 - \kappa\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P}\right)\nabla \cdot \boldsymbol{V}$$

显然上式计及了热传导修正，黏滞效应则包含在运动方程中。将这个式子代到(1.4.6)式中，得到

$$\begin{aligned}\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} &= \rho \boldsymbol{F} - C_0^2 \nabla \rho' - \frac{\beta - 1}{\rho_0} C_0^2 \nabla \rho'^2 \\ &\quad + \left[\kappa\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P}\right) + \mu' + \mu\right]\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{V} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{V}\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

正如第 1 章指出过，对于无旋运动，有

$$\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \nabla^2 \boldsymbol{V}$$

则上式可以简化为

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t}=\rho\boldsymbol{F}-C_0^2\nabla\rho'-\frac{\beta-1}{\rho_0}C_0^2\nabla\rho'^2+b\nabla^2\boldsymbol{V} \tag{4.1.2}$$

式中

$$b=\mu'+2\mu+\kappa\left(\frac{1}{C_V}-\frac{1}{C_P}\right) \tag{4.1.3}$$

如果不考虑体积力 F，对于一维情况, (4.1.2)式成为

$$\rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=-C_0^2\frac{\partial\rho'}{\partial x}-2\frac{\beta-1}{\rho_0}C_0^2\rho'\frac{\partial\rho'}{\partial x}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.1.4}$$

一维连续性方程为

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+(\rho_0+\rho')\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial\rho'}{\partial x}=0 \tag{4.1.5}$$

现在引入第一类伴随坐标变换，借此来研究一维行波问题。

设原来的自变量是 x 和 t，引入新的独立变量 X 和 τ(称它们为第一类伴随坐标)，它们的关系可表示为

$$\left.\begin{aligned}X&=x\\ \tau&=t\mp\frac{1}{C_0}x\end{aligned}\right\} \tag{4.1.6}$$

式中，负号为沿正方向传播的行波，正号为沿反方向行走的波，由于正反两个方向讨论起来完全类似，故下面只讨论正向波(取负号)。对于变换(4.1.6)来说，其导数关系可以表示为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial X}-\frac{1}{C_0}\frac{\partial}{\partial\tau}\\ \frac{\partial}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial\tau}\end{aligned}\right\} \tag{4.1.7}$$

将这些变换关系代入(4.1.4)式和(4.1.5)式，假设 ρ', u 等量的波形在一个波长内失真很小，于是有

$$\frac{\partial}{\partial X} \ll \frac{1}{C_0}\frac{\partial}{\partial \tau} \tag{4.1.8}$$

即认为 $\dfrac{\partial}{\partial X}$ 为一阶小量，注意到 ρ' 和 u' 都是一阶小量，于是经过变换之后，(4.1.4)式和(4.1.5)式分别变成

$$\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}-\frac{u}{C_0}\right)\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{b}{\rho_0 C_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}+\frac{C_0}{\rho_0}\left[1-2(\beta-1)\frac{\rho'}{\rho_0}\right]\frac{\partial \rho'}{\partial \tau}-\frac{C_0^2}{\rho_0}\frac{\partial \rho'}{\partial x} \tag{4.1.9}$$

及

$$\frac{1}{\rho_0}\left(1-\frac{u}{C_0}\right)\frac{\partial \rho'}{\partial \tau}-\frac{1}{C_0}\left(1+\frac{\rho'}{\rho_0}\right)\frac{\partial u}{\partial \tau}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{4.1.10}$$

为书写简便起见，将上面两个式子中的 X 写成了 x。从这两个表达式中消去 ρ'，在消去过程中应用了下述近似原则：首先，所有的项都只是准确到二级近似；另外，根据近似式(4.1.8)，$\dfrac{\partial}{\partial \tau}$ 的项是零阶项，$\dfrac{\partial}{\partial x}$ 的项是一阶小项；在非线性项中关于 ρ' 和 u 的关系只取线性近似

$$\frac{\rho'}{\rho_0}=\frac{u}{C_0} \tag{4.1.11}$$

就够了。从(4.1.10)式容易解出

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \tau} \approx \frac{\rho_0}{C_0}\frac{\partial u}{\partial \tau}+\frac{2\rho_0 u}{C_0^2}\frac{\partial u}{\partial \tau}-\rho_0\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4.1.12}$$

显然，这个式子中应用了 $\dfrac{\partial}{\partial x}$ 为一阶小量这一条件。将这些关系代入(4.1.9)式，最终得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\beta}{C_0^2}u\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{b}{2\rho_0 C_0^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \tag{4.1.13}$$

上式即为对应于第一类伴随坐标变换下的伯格斯方程。

如果作第二类伴随坐标变换，则

$$\left.\begin{aligned} X &= x - C_0 t \\ \tau &= t \end{aligned}\right\} \tag{4.1.14}$$

也有类似的微分关系，推导过程完全类似，可以得到这种坐标变换下的伯格斯方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta u \frac{\partial u}{\partial x} = b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.1.15}$$

式中，仍将 X 写成 x 了。

4.2　伯格斯方程的解[1~15]

在1.8节曾经指出过，雷诺数是衡量流体力学方程中非线性项和耗散项相对大小的量，当 $Re \gg 1$时，耗散效应与非线性效应比较可以忽略不计，因而介质呈现为理想流体，由(4.1.12)式得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\beta}{C_0^2} u \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$$

将(1.9.10)式代入上式容易得到

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)_u = -\frac{\beta}{C_0^2} u$$

应用(4.1.14)式可以将上式写成

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_u = \frac{1}{C_0}\left(1 - \frac{\beta}{C_0} u\right) \approx \frac{1}{C_0\left(1 + \frac{\beta}{C_0} u\right)}$$

或者写成

$$\frac{\partial x}{\partial t} = C_0 + \beta u$$

由(2.1.10)式和(2.1.13)式可知，上式即为熟知的黎曼-厄恩肖解的情况，即我们得到了简单波。

当 $Re \ll 1$，即耗散效应比起非线性效应来说占了绝对优势时，(4.1.12)式中的非线性项可以当作微扰项来处理，令

$$u = u^{(1)} + u^{(2)} \tag{4.2.1}$$

代入(4.1.2)式，对于一阶项，有

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial \tau^2} \tag{4.2.2}$$

于是二阶项满足

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial \tau^2} = \frac{\beta}{C_0^2} u^{(1)} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} \tag{4.2.3}$$

对于正弦波声源来说，在(4.2.2)式中令

$$u^{(1)} = u_0 \mathrm{e}^{-\alpha x} \sin \omega\tau \tag{4.2.4}$$

解得

$$\alpha = \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \omega^2 \tag{4.2.5}$$

此即为黏滞及热传导耗散所引起的小振幅吸收系数，在线性声学中早被人们所熟知。将(4.2.4)式代入(4.2.3)式，于是有

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} - \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial \tau^2} = \frac{\beta \omega u_0^2}{2C_0^2} \sin 2\omega\tau$$

令解

$$u^{(2)} = u_0^{(2)}(x) \sin 2\omega\tau$$

代入上式得到

$$\frac{\mathrm{d}u_0^{(2)}}{\mathrm{d}x} + 4\alpha u_0^{(2)} = \frac{\beta \omega u_0^2}{2C_0^2} \mathrm{e}^{-2\alpha x}$$

这是一个一阶常微分方程，其特解为

$$\frac{\beta \omega u_0^2}{4\alpha C_0^2} \mathrm{e}^{-2\alpha x}$$

而对应的齐次方程的通解为

$$Ae^{-4\alpha x}$$

式中, A 为积分常数，它可以从边界条件

$$u_0^{(2)}(x=0)=0$$

来决定，这个条件表明，在声源处二阶谐波尚未产生。根据这些关系得到

$$u^{(2)}(x,\tau)=\frac{\beta\omega u_0^2}{4\alpha C_0^2}(1-e^{-2\alpha x})e^{-2\alpha x}\sin 2\omega\tau \tag{4.2.6}$$

当 $\alpha x\ll 1$ 时，$(1-e^{-2\alpha x})e^{-2\alpha x}\approx 2\alpha x$，这表明，在离声源较近的地方，二次谐波随距离增长，当 $ax=\frac{1}{2}\ln 2$ 时, (4.2.6)式达到最大值，然后随距离增大而单调减小。

现在我们来讨论一般情况，即讨论伯格斯方程的严格解，其边界条件为，当 x=0 时，有

$$u=u_0\sin\omega\tau \tag{4.2.7}$$

为了书写简便起见，我们先将(4.1.12)式化为量纲为一形式，为此，对该式除以 $\beta Mau_0/x_c$，而且令 $\delta_1=b/2\rho_0$，$V=u/u_0$，$\sigma=\beta Max/x_c$，$y=C_0\tau/x_c$，$x_c=C_0/\omega$，$\Gamma=\beta MaC_0x_c/\delta_1$，这样就可以将(4.1.12)式化为

$$V_\sigma-VV_y=\Gamma^{-1}V_{yy} \tag{4.2.8}$$

式中，V_σ 为函数 V 对 σ 的导数，依次类推。现在引入科尔-霍普变换，即令

$$V=\frac{2}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial y}(\ln\zeta) \tag{4.2.9}$$

代入(4.2.8)式，得到

$$\zeta_\sigma=\Gamma^{-1}\zeta_{yy} \tag{4.2.10}$$

上式为标准的热传导型的方程，其解为

$$\zeta=\frac{\sqrt{\Gamma}}{2\sqrt{\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_0(\lambda)\exp[-\Gamma(\lambda-y)^2/4\sigma]d\lambda$$

将 Γ, σ 等表达式代入，可得

$$\zeta=\frac{1}{\sqrt{4\pi\alpha x}}\int_{-\infty}^{\infty}\zeta_0(\lambda)\exp[-(\lambda-y)^2/4\alpha^2 x]d\lambda \tag{4.2.11}$$

$\zeta_0(\lambda)$ 为 ζ 的初始值其寻求的过程如下。显然，$t<0$ 空间没有扰动，只是在 $t\geqslant 0$，在 $x=0$ 的平面上有正弦式扰动

$$V=\sin\omega t$$

于是代入(4.2.9)式可以求得

$$\zeta_0(\lambda)=\zeta(0,y)=\exp\left[\frac{1}{2}\Gamma\int_{-\infty}^{y}V(0,\xi)\mathrm{d}\xi\right]=\begin{cases}\exp\left[\frac{1}{2}\Gamma(1-\cos y)\right], & y>0\\ 1, & y<0\end{cases}$$

将这个结果代入(4.2.11)式，并对所得到的结果作下述变量变换，即

$$\lambda-y=\pm\sqrt{\frac{4\sigma}{\Gamma}}q$$

将 ζ_0 的表达式及这个变换代入(4.2.11)，容易得到

$$\begin{aligned}\xi=&\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{y}{m}\right)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\Gamma}\int_{\frac{y}{m}}^{\infty}\exp\left\{-q^2-\frac{1}{2}\Gamma\cos(mq-y)\right\}\mathrm{d}q\\&+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\Gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-q^2-\frac{1}{2}\Gamma\cos(mq+y)\right\}\mathrm{d}q\end{aligned}\tag{4.2.12}$$

式中

$$m=\sqrt{4\alpha x}$$

$$\operatorname{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi$$

为余概率积分。由于

$$\frac{y}{m}\sim\frac{\omega t}{\sqrt{\alpha x}}$$

当 t 很大时，$\frac{y}{m}$ 很大，所以在足够长的时间之后，(4.2.12)式中的前两项(称为瞬态项)逐渐消失，最后只剩下第三项(稳态项)，在这一项中，由熟知的展开式

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\Gamma\cos(mq+y)}=\sum_n\varepsilon_n I_n\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)(-1)^n\cos n(mq+y)$$

式中

$$\varepsilon_n=\begin{cases}1, & n=0\\ 2, & n\geqslant 1\end{cases}$$

将这个展开式代入(4.2.12)式中右端的第三项，注意到

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-q^2}\ \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\ n(mq)\mathrm{d}q=\begin{cases}0\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}n^2m^2}\end{cases}$$

于是有

$$\zeta=\mathrm{e}^{\Gamma/2}\sum_n\varepsilon_n(-1)^n\mathrm{I}_n\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)\mathrm{e}^{-n^2\sigma/\Gamma}\cos ny \tag{4.2.13}$$

式中，$\mathrm{I}_n(x)$为虚宗量贝塞尔函数。将(4.2.13)式代入(4.2.9)式就能得伯格斯方程的精确解，这个式子是以高级超越函数为一般项的级数的分式函数，它显得很冗长累赘，任何应用都必须使用数字计算机才能得到有用的结果。为了对它有较深入的了解，现在来分析它的近似特性。

根据贝塞尔函数的大宗量展开式，即当$\Gamma\gg 1$时，有

$$\mathrm{I}_n\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\sim\frac{\mathrm{e}^{\Gamma/2}}{\sqrt{\pi\Gamma}}\left[1-\frac{4n^2-1}{1!4\Gamma}+\frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!(4\Gamma)^2}-\cdots\right] \tag{4.2.14}$$

将上式代入(4.2.13)式，在展开式中只取第一项，于是得到

$$\zeta=\frac{\mathrm{e}^{\Gamma}}{\sqrt{\pi\Gamma}}\sum_n\varepsilon_n(-1)^n\mathrm{e}^{-n^2\sigma/\Gamma}\cos ny$$

根据雅可比ϑ函数的定义，有

$$\vartheta_4(\nu,q)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\varepsilon_nq^{n^2}\cos(2\pi n\nu)$$

$$\ln\frac{\vartheta_4(\nu,q)}{\vartheta_4(0,q)}=4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}\frac{\sin^2(n\pi\nu)}{m}$$

于是ζ和V可以分别写成

$$\zeta=\frac{\mathrm{e}^{\Gamma}}{\sqrt{\pi\Gamma}}\vartheta_4\left(\frac{1}{2\pi}y,\mathrm{e}^{-\sigma/\Gamma}\right)$$

$$V=\frac{2}{\Gamma}\left[\ln\vartheta_4\left(\frac{1}{2\pi}y,\mathrm{e}^{-\sigma/\Gamma}\right)\right]_y$$

$$=\frac{2}{\Gamma}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin my}{\sinh(m\alpha x)} \tag{4.2.15}$$

(4.2.15)式称为科尔近似表达式。

如果将(4.2.14)式改写为

$$I_n(\Gamma/2)\sim \mathrm{e}^{-n^2/\Gamma}\left[1+\frac{1}{4\Gamma}-\frac{(n^2-9/32)}{\Gamma^2}-\cdots\right] \tag{4.2.16}$$

仍取第一项，于是得到

$$\xi=\vartheta_4\left(\frac{1}{2\pi}y,\mathrm{e}^{-(1+\sigma)/\Gamma}\right)$$

重复以前的计算可以得到

$$V=\frac{2}{\Gamma}\sum_n\frac{\sin ny}{\sinh[n(1+\sigma)/\Gamma]} \tag{4.2.17}$$

这个式子即为熟知的法伊近似解。

如果考虑到更高级近似，即当$\Gamma\gg 1$时，在(4.2.16)式中计及n^2/Γ^2这一项修正，则有

$$(\ln\zeta)_y=\left\{\ln\left[1+\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial(1+\sigma)}\vartheta_4\left(\frac{1}{2\pi}y,\mathrm{e}^{-(1+\sigma)/\Gamma}\right)\right]\right\}_y$$

利用

$$\ln\left[1+\frac{1}{\Gamma\vartheta_4}\frac{\partial\vartheta_4}{\partial(1+\sigma)}\right]\approx\Gamma^{-1}\frac{\partial}{\partial(1+\sigma)}\ln\vartheta_4$$

有

$$V=\frac{2}{\Gamma}\sum\frac{\left\{1-\frac{n}{\Gamma^2}\coth\left[\frac{n(1+\sigma)}{\Gamma}\right]\right\}}{\sinh[n(1+\sigma)/\Gamma]}\sin ny \tag{4.2.18}$$

这个式子称为修正的法伊近似解。

在求得上述各种解的时候，都应用了 $I_n(x)$的(4.2.14)展开式，显然，这个式子

只是当常数 Γ 满足 $\Gamma \gg n^2$ 时收敛较快。另外，由于(4.1.13)式是一个无穷级数，所以 $\Gamma \gg n^2$ 这个条件是否成立需要讨论。显然，这里的 Γ 是常数，而 n 是无穷数列，求和号是对它求和，于是总可以找到一个充分大的 N，当 $n > N$ 时使这个条件不成立。但是从(4.2.13)式可知，由于因子

$$\mathrm{e}^{-\sigma n^2/\Gamma}$$

的存在，当 σ/Γ 不是太小时，(4.2.13)式收敛是较快的，如果要求 Γ 很大，这就要求 σ 要足够大，从而使得 n 大的那些项对整个式子贡献很小，因此，如将(4.2.14)式代入到(4.2.13)式就得到一个二重级数，σ 越大，它就收敛越快，所以上述解既要求 Γ 大，又要求 σ/Γ 不能太小。由于科尔解是在(4.2.14)式中只取了第一项，而法伊解则取到较高次项的解，修正的法伊解则取到更高的项，故科尔解要求 Γ 最大，因而要求 σ 很大，法伊解对 σ 的要求次之，修正的法伊解对 σ 的要求又次之。通过数值计算，分别研究了上述三种近似解的基波振幅以及精确解的百分误差与 σ 的关系，表示于图 4.1，图中选取 $\Gamma = 50$。由图解可见，对于相同的 σ 值，科尔解的精度最差，法伊解次之，修正的法伊解最好，这与上述讨论是一致的。

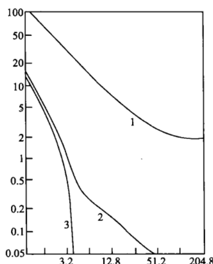


图 4.1　科尔解、法伊解以及修正法伊解的百分误差与 σ 的关系

1. 科尔解；2.法伊解；3.修正法伊解

我们现在来研究法伊解的波形。由傅里叶展开定理容易得到

$$\pi - y = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin ny, \quad 0 < y < 2\pi \tag{4.2.19}$$

$$\frac{\pi\sinh a(\pi-y)}{\sinh a\pi}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+a^2}\sin ny,\quad 0<y<2\pi \tag{4.2.20}$$

以及

$$\frac{\pi}{\sin\pi z}=\frac{1}{z}+\sum_{k\neq 0}(-1)^k\left(\frac{1}{z-k}+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{z+k}$$

令

$$z=-\frac{\mathrm{j}n}{f\pi},\quad \mathrm{j}=\sqrt{-1}$$

容易得到

$$\left[1/\sinh\left(\frac{n}{f}\right)\right]=f\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\varepsilon_k n}{n^2+k^2\pi^2f^2} \tag{4.2.21}$$

$$\varepsilon_k=\begin{cases}1, & k=0\\ 2, & k\geqslant 1\end{cases}$$

将(4.2.20)及(4.2.21)式应用于(4.2.17)式，可得

$$\begin{aligned}V&=\frac{2}{\Gamma}\sum_n\frac{\sin ny}{\sinh\left[\frac{n(1+\sigma)}{\Gamma}\right]}\\&=\frac{2}{\Gamma}\sum_n\frac{\Gamma}{1+\sigma}\sum_k\varepsilon_k(-1)^k\frac{n\sin ny}{n^2+k^2\pi^2\Gamma^2/(1+\sigma)^2}\\&=\frac{\pi}{1+\sigma}\sum_k\varepsilon_k(-1)^k\frac{\sinh\frac{k\pi\Gamma}{1+\sigma}(\pi-y)}{\sinh\frac{k\pi\Gamma}{1+\sigma}\pi}\end{aligned}$$

注意上式中 $k=0$ 时，分子分母为零，这一项的极限为$(\pi-y)/\pi$，故有

$$V=\frac{1}{1+\sigma}\left\{\pi-y+2\pi\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sinh[2k(\pi-y)/\Delta]}{\sinh(2k\pi/\Delta)}\right\} \tag{4.2.22}$$

$$0<y<2\pi$$

式中

$$\Delta=\frac{2(1+\sigma)}{\pi\Gamma}$$

当 $\Delta\ll 1$，有

$$\sinh(2k\pi/\Delta)\to\frac{1}{2}e^{2k\pi/\Delta}$$

于是上式花括号中的第三项变成

$$2\pi\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{\sinh[2k(\pi-y)/\Delta]}{\sinh(2k\pi/\Delta)}$$

$$\approx 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}[e^{-2ky/\Delta}-e^{-2k(2\pi-y)/\Delta}]$$

当 $y\neq 0$ 时，上式成为

$$\frac{2\pi}{1+e^{-2y/\Delta}}-\frac{2\pi}{1+e^{-2(2\pi-y)/\Delta}}$$

$$=2\pi\left\{\frac{-e^{-2y/\Delta}}{1+e^{-2y/\Delta}}+\frac{e^{-2(2\pi-y)/\Delta}}{1+e^{-2(2\pi-y)/\Delta}}\right\}$$

将上式两边相加除以 2，可以得到

$$=\pi\left\{\tanh\left(\frac{y}{\Delta}\right)-\tanh\left(\frac{2\pi-y}{\Delta}\right)\right\}$$

将这个结果代入(4.2.22)式得到

$$V=\frac{1}{1+\sigma}\left\{\pi-y+\pi\tanh\left(\frac{y}{\Delta}\right)-\pi\tanh\left(\frac{2\pi-y}{\Delta}\right)\right\} \tag{4.2.23}$$

上面的解在 $0<y<2\pi$ 内成立。当 y 不是很接近于 2π 时，$\tanh\left(\frac{2\pi-y}{\Delta}\right)\to 1$，于是有

$$V\approx\frac{1}{1+\sigma}\left\{-y+\pi\tanh\left(\frac{y}{\Delta}\right)\right\} \tag{4.2.24}$$

如果 y 接近于 2π 则 $\tanh(y/\Delta)\to 1$，于是(4.2.23)式成为

$$V \approx \frac{1}{1+\sigma}\left\{-(y-2\pi)+\pi\tanh\left(\frac{y-2\pi}{\Delta}\right)\right\} \tag{4.2.25}$$

上面的所有结果都是在(0, 2π)区间内成立，但可以向左右作周期性延拓。图 4.2 是延拓图形，由这张图可以看出，(4.2.24)式对于区间(−π, 0)亦成立，因此周期性的区间(0, 2π)可以延拓到(−π, π)，其波形表达式仍为(4.2.24)式，即

$$V = \frac{1}{1+\sigma}\{-y+\pi\tanh(y/\Delta)\},\quad -\pi < y < \pi \tag{4.2.24a}$$

当 y 在(0, π)内，$y/\Delta \gg 1$ 时，有

$$V = \frac{1}{1+\sigma}(-y+\pi),\quad -\pi < y < \pi \tag{4.2.26}$$

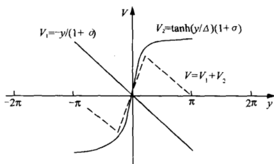


图 4.2　延拓图。该图可以用 2π 为周期向左右延拓

当 y 在(−π, 0)内且有 $|y/\Delta| \gg 1$ 时，有

$$V = \frac{1}{1+\sigma}(-y-\pi),\quad -\pi < y < 0 \tag{4.2.27}$$

这些式子所表示的即为理想介质中的锯齿波波形。

现在讨论另一个极端情况，当 α 很大或者 $\sigma \gg \Gamma \gg 1$ 时，(4.2.13)式中只有 $n = 0$ 和 $n = 1$ 的项起主要作用，于是容易得到

$$V = \frac{2}{\Gamma}\frac{I_1\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)}{I_0\left(\frac{1}{2}\Gamma\right)}e^{-\alpha x}\sin y \approx \frac{4}{\Gamma}e^{-\alpha x}\sin y \tag{4.2.28}$$

或者

$$u=\frac{2b\omega}{\rho_0 C_0 \beta}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin y$$

这个式子表明，在这个区域 u 与原始发射信号的振幅 u_0 无关，故将 $\sigma \gg \Gamma \gg 1$ 的区称为老年区。

4.3　布莱克斯托克桥函数[16]

在二级近似情况下，无损耗流体 $0 \leqslant \sigma < 1$ 区域中的有限振幅波可用贝塞尔-富比尼解(2.3.10)来表示，即

$$\frac{u}{u_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mathrm{J}_n(n\sigma)}{n\sigma}\sin n\omega\tau$$

这是在第 2 章中得到的结果。对于黏热流体在 $\sigma > 1, \Gamma \gg 1$，而且 σ/Γ 又不太小的情况下，我们得到了法伊近似解(4.2.7)

$$\frac{u}{u_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2/\Gamma}{\sinh[n(1+\sigma)/\Gamma]}\sin n(\omega t-kx)$$

当 $\Gamma \to \infty$时，上式应化归理想流体情况下的解。但实际上，当 $\Gamma \to \infty$时，(4.2.17)式变成

$$\frac{u}{u_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(1+\sigma)}\sin n(\omega t-kx) \tag{4.3.1}$$

显然，这个结果与(2.3.10)式并不相同。产生这个差别的原因是，这两个解是在不同的 σ 值范围内导得的，而且这两个范围又彼此不重叠。那么，这两个解之间是否存在联系呢？这个问题于 1966 年由布莱克斯托克(Blackstock)解决了。

首先研究一下贝塞尔-富比尼变换。在(2.3.7)式中令

$$\Phi=\omega\tau+\sigma\sin\Phi$$

或者

$$-\omega\tau=\sigma\sin\Phi-\Phi$$

在(2.3.5)式中，我们曾经将黎曼隐式解展开为傅里叶级数，并且在求傅里叶系数 B_n 时，$\omega\tau$ 的积分限是$(0, \pi)$。显然，对上式变换来说，当 $\omega\tau=\pi$ 时，不管 σ 取什么值，只有一个根 $\Phi=\pi$ 与之对应。当 $\omega\tau=0$(积分下限)，$\sigma<1$ 时，Φ 也是单值的，即

$\Phi\big|_{\omega\tau=0}=0$ 与之相对应；可是当 $\sigma>1$ 时，情况却不是这样简单，因为在 $\omega\tau=0$，Φ 不是单值的，这一点从下面的讨论即可看出。

事实上，当 $\sigma>1$ 时，令

$$\sin\Phi-\frac{1}{\sigma}\Phi=y$$

令 $y=y_1-y_2$，$y_1=\sin\Phi$，$y_2=\dfrac{1}{\sigma}\Phi$，在 y-Φ 平面上，y_1 的最大斜率为 1，即在原点 $\Phi=0$ 附近，其切线的斜率不超过 1，或者说，切线与 Φ 轴的夹角总是小于 45°，但当 $\sigma>1$ 时 $y_2=\dfrac{1}{\sigma}\Phi$ 的斜率也小于 1，因此，在 $\sigma>1$ 时，与 $\omega\tau=0$ 对应的 Φ 的根除 $\Phi=0$ 以外，还有一个 $\Phi=\Phi_{\min}\neq0$(图 4.3)。

当 $\sigma<1$ 时，y_2 的斜率大于 1，即它与 Φ 轴的交角大于 45°，于是 y_1 和 y_2 的交点除了 $\Phi=0$ 这一点以外，没有第二个交点，即在 $\omega\tau=0$ 时对应的 Φ 根是单根。

显然，根据傅里叶定理，不管 σ 取什么值，黎曼-厄恩肖(二级近似)解总可以展成傅里叶级数，即

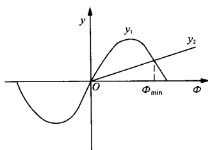


图 4.3　$\Phi=\omega\tau+\sigma\sin\Phi$ 求根图

$$\frac{u}{u_0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin n\omega\Gamma \tag{4.3.2}$$

于是傅里叶系数为

$$\begin{aligned}B_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\omega\tau+\sigma\frac{u}{u_0}\right)\cdot\sin n\omega\tau\,\mathrm{d}(\omega\tau)\\&=\frac{2}{n\pi}\left\{-\sin\Phi\cdot\cos n\omega\tau\Big|_{\omega\tau=0}^{\omega\tau=\pi}\right.\\&\left.\quad+\int_{\omega\tau=0}^{\omega\tau=x}\cos n\omega\tau\cdot\cos\Phi\,\mathrm{d}\Phi\right\}\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

当 $\sigma<1$ 时, (4.3.3)式花括号中的第一项为零，而第二项为

$$B_n=\frac{2\mathrm{J}_n(n\sigma)}{n\sigma}$$

即为贝塞尔-富比尼展开系数。但在 $\sigma>1$ 时，由于 $\omega\tau=\pi$, $\Phi=\pi$, $\omega\tau=0$, Φ 除了 $\Phi=0$ 以外，还有 $\Phi=\Phi_{\min}$，而 $\Phi_{\min}$ 满足

$$\sin\Phi\,|_{\omega\tau=0}=\sin\Phi_{\min}=\frac{1}{\sigma}\Phi_{\min} \tag{4.3.4}$$

因此在 $\sigma>1$ 时，有

$$B_n=\frac{2}{n\pi}\sin\Phi_{\min}+\frac{2}{n\pi\sigma}\int_{\Phi_{\min}}^{\pi}\cos n(\Phi-\sigma\sin\Phi)\mathrm{d}\Phi \tag{4.3.5}$$

由(2.3.5)式 ~ (2.3.7)式可知，当 $\omega\tau=0+\varepsilon$，ε 为小量, $\sin\Phi_{\min}\approx u_1/u_0$，故有

$$\Phi_{\min}=\arcsin\left(\frac{u_1}{u_0}\right) \tag{4.3.6}$$

当 $\sigma\gg1$ 时，由(3.3.19)式可知

$$u_1=\frac{\pi u_0}{1+\sigma}$$

综合所得结果，有

$$\Phi_{\min}=\begin{cases}0, & \sigma<1\\ \arcsin\left(\dfrac{u_1}{u_0}\right), & \sigma>1\end{cases}$$

这时

$$\Phi_{\min}=\sigma\sin\Phi_{\min}=\sigma\frac{u_1}{u_0}=\frac{\pi\sigma}{1+\sigma}\approx\pi$$

由此可见, (4.3.5)式的右端第二项为零，故

$$B_n=B_n^{(\mathrm{F})}=\frac{2}{n\pi}\sin\Phi_{\min}=\frac{2}{n(1+\sigma)} \tag{4.3.7}$$

此即为 $\Gamma\to\infty$ 时法伊解的展开系数，并表为 $B_n^{(\mathrm{F})}$；另外，当 $\sigma<1$ 时, (4.3.5)式右端第一项为零，而第二项为

$$B_n = \frac{2J_n(n\sigma)}{n\sigma}$$

即为贝塞尔-富比尼展开系数。因此，(4.3.5)式即为布莱克斯托克的桥函数的展开系数，一般将它表示为

$$B_n = B_n^{(F)} + B_n^{(f)}$$

它可以通过数值计算求值，图 4.4 表示 B_1 与 σ 的曲张。

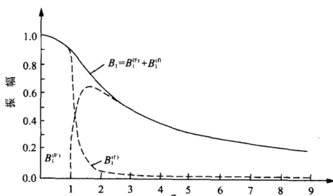


图 4.4　B_1 与 σ 的曲线

参 考 文 献

[1] Blackstock D T. Thermoviscous attenuation of plane, periodic, finite-amplitude sound waves. Jour Acoust Soc Am, 1964, 36:534~542

[2] Rudenko O V, Soluyan S I. Theoretical foundations of nonlinear acoustics.New York: Consultants Bureau. 1977

[3] Blackstock D T. Amer. Institute of physical handbook. 3rd ed. New York: McGraw Hill Company, 1972: 3~183

[4] Fay R D. Plane sound waves of finite amplitude. Jour Acoust Soc Am, 1931, 3: 222~241

[5] Fox F E, Wallace W A. Absorption of finite amplitude sound waves. Jour Acoust Soc Am, 1954, 26: 994~1006

[6] Keck W, Beyer R T. Frequency spetrum of finite-amplitude ultrasonic waves in liquids. Phys Fluids, 1960, 3: 346~352

[7] Medwin H. Attenuation of guided, repeated shock waves in gases. Jour Acous Soc Am, 1964, 36: 870~877

[8] Mendousse J S. Nonlinear dissipative distortion of progressive sound waves at moderate amplitudes. Jour Acoust Soc Am, 1953, 25: 51~54

[9] Merklinger H. Fundamental-frequency component of a finite-amplitude plane wave. Jour Acoust Scoust Soc Am, 1973, 54: 1760, 1761

[10] Rudnick I. On the attenuation of a repeated sawtooth shock wave. Jour Acoust Soc Am, 1953, 25: 1012, 1013

[11] Webster D A, Blackstock D T. Finite-amplitude saturation of plane sound waves in air. Jour Acoust Soc Am, 1977, 62: 518~523

[12] Wiener S. Standing sound waves of finite-amplitude . Jour Acoust Soc , Am, 1966, 40: 240~243

[13] Westervelt P J. Self scattering of high intensity sound. *In*: Cremer L. Proc 3rd ICA. Stuttgart, 1959.316~321

[14] Whitham G B. The flow pattern of a supersonic projectile. Commun Pure Appl Math , 1952, **5**: 301~348

[15] Наугольных К А. О поглощении звуковых волн конечной амплитуды. Акуст Ж, 1958, 4: 115~124

[16] Blackstock D T. Connection between the Fay and Fubini solutions for plane sound waves of finite amplitude., Jour Acoust Soc Am, 1966, 39: 1019~1026

第 5 章　有限振幅球面波与柱面波

5.1　伯格斯方程[1~5]

从前两章的讨论可知，一列正弦平面波在介质中传播时，如果雷诺数较大，则波形逐渐畸变，最终形成冲击波，定义 $\sigma=1$ 的距离为冲击波形成距离。

当波阵面不是平面，而是扩展性的波阵面(如球面波与柱面波等)时，情况与平面波结果将有所不同。这是由于波阵面扩展，它们的振幅或者声强是随距离减小的，在这个意义上来说，波阵面扩展的效果相当于增大了声强衰减项，也就会延缓冲击波形成，因此，可以预料，球面波与柱面波的冲击波形成距离要比平面波的大一些。

下面只讨论对称球面波和对称柱面波的情形。对于对称的波阵面而言，(4.1.2)式和(1.2.4)式可分别写为

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial r}=-C_0^2\frac{\partial\rho'}{\partial r}-\frac{\beta-1}{\rho_0}C_0^2\frac{\partial\rho'^2}{\partial r}+b\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{n}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{n}{r^2}u\right)\tag{5.1.1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^n}\frac{\partial\left(r^n\rho u\right)}{\partial r}=0\tag{5.1.2}$$

$$\rho=\rho_0+\rho'\tag{5.1.3}$$

当 $n=1$ 时，为柱面波的方程，当 $n=2$ 时，则属于球面波的方程，而 u 为质点速度的径向分量，根据对称性有 $u=u(r)$。引入伴随坐标变换(R,τ)，即令

$$R=r$$

$$\tau=t\mp\frac{r-r_0}{C_0}$$

式中，负号对应于向外传播的发散波，而正号对应于向内传播的收敛波，式中 r_0 为某个参考半径，通常它是声源的半径。与(4.1.6)式的变换类似，将这两个变换式代入上面的方程组，类似于(4.1.8)式，仍假设

$$\frac{\partial}{\partial R} \ll \frac{1}{C_0}\frac{\partial}{\partial \tau}$$
$$kR \gg 1$$

即 $\frac{\partial}{\partial R}$ 和 $\frac{1}{kR}$ 为一阶小，考虑到这些，与平面波伯格斯方程的推导原则类似，我们仍限制在二级近似范围内，即在消去 ρ' 的过程中，如果所讨论的项是一次项，则在应用连续性方程时必须采用精确到二阶量的关系式来取代 ρ'；如果讨论的项已经是二次的，则只要采用线性近似 $\rho'=\rho_0 u/u_0$ 来取代 ρ' 就够了。根据这一原则，从上述 3 个方程中消去 ρ' 即可以得到相应的伯格斯方程

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{n}{2r}u-\frac{\beta}{C_0^2}u\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{b}{2\rho_0 C_0^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \tag{5.1.4}$$

式中，为书写简便起见，将大写的 R 写成小写的 r 了。我们要进一步将上式化成伯格斯方程的标准形，为此我们令

$$\left.\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{A}{A_0}}u \\ z &= \int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{A_0}{A}}\mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \tag{5.1.5}$$

式中，$A=A(x)$为波阵面面积函数，$A_0=A(r_0)$相对于 $x=r_0$ 处波阵面的面积，如对于球面波来说，$A=4\pi r^2$, $A_0=4\pi r_0^2$，于是

$$U=\frac{r}{r_0}u,\quad z=r_0\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

对于柱面波来说，$A\sim 2\pi r$, $A_0\sim 2\pi r_0$，于是

$$U=\sqrt{\frac{r}{r_0}}u,\quad z=2\sqrt{rr_0}-2r_0$$

将此种变换代入(5.1.4)式，便得到发散波的伯格斯方程

$$\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\beta}{C_0^2}U\frac{\partial U}{\partial \tau}=\frac{b}{2\rho_0 C_0^3}\sqrt{\frac{A}{A_0}}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \tag{5.1.6}$$

对于收敛波，只要在上式右端取一负号即可。因此，不论对于球面波、柱面波或者是平面波，(5.1.6)式是伯格斯方程的统一表示式。就平面波而言，$\sqrt{A/A_0}=1$，(5.1.6)式化归(4.1.13)式，在第 4 章，对于这种情况通过科尔-霍普变换已经得到准确解。但就球面波和柱面波而言，由于 $\sqrt{A/A_0}$ 不是常数，一般不易得到准确解。这时如果仍用平面波的眼光来看待方程(5.1.6)，定义

$$b'=b\sqrt{\frac{A}{A_0}}$$

则介质的等效平面波耗散参数 b' 与距离有关，发散波的 b' 随距离增大而增大，对于收敛波，结论则相反。

5.2 大雷诺数情况下伯格斯方程的解[1~5]

当 $Re \gg 1$ 时，(5.1.6)式右端的项可以忽略，故方程成为

$$\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\beta}{C_0^2}U\frac{\partial U}{\partial \tau}=0 \tag{5.2.1}$$

因为 $U=U(z,\tau)$，利用(1.9.10)式容易得到

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)_u=-\frac{\beta}{C_0^2}U \tag{5.2.2}$$

(5.2.2)式的解为

$$\begin{aligned}\tau&=-\frac{\beta}{C_0^2}Uz+f(U)\\ U&=F\left(\tau+\frac{\beta}{C_0^2}Uz\right)\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

式中，$f(U)$为 U 的任意函数，$F\left(\tau+\frac{\beta}{C_0^2}Uz\right)$为另一个函数，其宗量为$\tau+\frac{\beta}{C_0^2}Uz$，参照黎曼-厄恩肖解情况，对于正弦波源 $z=0$，有

$$u = u_0 \frac{r_0}{r}\sin(\omega t - kr_0)$$

解(5.2.3)可表示为

$$U = U_0 \sin\left(\omega\tau + \frac{\beta\omega}{C_0^2}Uz\right) \tag{5.2.4}$$

对于平面波情况，定义一个量

$$\sigma_d = \frac{\beta\omega U_0}{C_0^2}z \tag{5.2.5}$$

如果是球面波 $\sigma_d=\sigma_s$，有

$$\sigma_s = \beta C_0^{-2}\omega u_0 r_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \tag{5.2.6}$$

对于柱面波 $\sigma_d=\sigma_c$，则有

$$\sigma_c = 2\beta C_0^{-2}\omega u_0 r_0 \left|1-\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right| \tag{5.2.7}$$

从所得到的结果可见，对发散的球面波和柱面波来说，其冲击波形成距离比平面波大，证明如下：

设平面波和球面波的冲击波形成距离分别为 x_s 和 r_{ss}，故在形成冲击波的地方有

$$\sigma_s|_{r=r_{ss}} = \sigma_d|_{x=x_s} \cdot \frac{r_{ss}}{x_s}\left(\frac{r_0}{r_{ss}}\ln\frac{r_0}{r_{ss}}\right) = 1$$

由于 $\sigma_d\big|_{x=x_s}=1$，于是有

$$r_{ss} = x_s\left[\frac{r_0}{r_{ss}}\ln\left(\frac{r_{ss}}{r_0}\right)\right]^{-1}$$

只要 $x>1$，总有 $\ln x/x<1$，故上式给出

$$r_{ss} > x_s$$

同理可证 $r_{cs} > x_s$。

参照平面波的结果，球面波与柱面波的贝塞尔-富比尼解为

$$\sqrt{\frac{A}{A_0}}\frac{u}{u_0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\omega\tau \tag{5.2.8}$$

$$B_n=\frac{2}{n\sigma}\mathrm{J}_m(n\sigma_d),\quad 0\leqslant\sigma_d<1$$

5.3　小雷诺数情况下发散波伯格斯方程的解[1~5]

在 Re 较小时，由于损耗项比非线性项大，基波能量的主要部分被介质耗散掉，少部分向高阶谐波转移，并以谐波的形式被耗散(损耗比基波更大)，故在这种情况下，冲击波是不易形成的，为了求解这一问题，我们用逐步近似法，即令

$$U=U^{(1)}+U^{(2)}+\cdots \tag{5.3.1}$$

式中，$U^{(1)}$为一阶小量，$U^{(2)}$为二阶小量，将这个结果代入(5.1.6)式，使同阶小量相等，可以得到

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial z}-\frac{b}{2\rho_0C_1^3}\sqrt{\frac{A}{A_0}}\frac{\partial^2U^{(1)}}{\partial\tau^2}=0 \tag{5.3.2}$$

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial z}-\frac{b}{2\rho_0C_0^3}\sqrt{\frac{A}{A_0}}\frac{\partial^2U^{(2)}}{\partial\tau^2}=\frac{\beta}{C_0^2}U^{(1)}\frac{\partial U^{(1)}}{\partial\tau} \tag{5.3.3}$$

对于正弦波源来说，在 $r=r_0$ 处有 $u=u_0\sin\omega t$，于是令

$$U^{(1)}=F(z)\sin\omega\tau$$

代入(5.3.2)式，可得

$$U^{(1)}=u_0\mathrm{e}^{-\alpha_c(r-r_0)}\sin\omega\tau \tag{5.3.4}$$

在求解中应用了，$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z},\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}$可由(5.1.5)或求得，此外还应用了 $r=r_0$ 处的边界条件。将(5.3.4)式代入(5.3.3)式，得到

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial z}-\frac{b}{2\rho_0C_0^3}\sqrt{\frac{A}{A_0}}\frac{\partial^2U^{(2)}}{\partial\tau^2}=\frac{\beta\omega u_0^2}{2C_0^2}\mathrm{e}^{-2\alpha_c(r-r_0)\sin2\omega\tau} \tag{5.3.5}$$

式中

$$a_c = \frac{b}{2\rho_0 C_0^3}\omega^2$$

为小振幅吸收系数。令

$$U^{(2)}(z,\tau) = Y(z)\mathrm{e}^{-2\alpha_c(r-r_0)}\sin 2\omega\tau \tag{5.3.6}$$

从(5.1.5)式可知，$\frac{\partial r}{\partial z} = \sqrt{\frac{A}{A_0}}$ 代入(5.3.5)式，可得

$$Y'(z) + 2a_c\sqrt{\frac{A}{A_0}}Y(z) = \frac{\beta\omega u_0^2}{2C_0^2} \tag{5.3.7}$$

(5.3.7)式的解为

$$Y(z) = \mathrm{e}^{-2a_c(r-r_0)}\frac{\beta\omega u_0^2}{2C_0^2}\int_{r_0}^{r}\mathrm{e}^{2a_c(t-r_0)}\sqrt{\frac{A_0}{A(t)}}\mathrm{d}t \tag{5.3.8}$$

对于球面波，$\frac{A_0}{A} = \frac{r_0^2}{t^2}$，于是

$$Y(z) = \frac{\beta\omega r_0 u_0^2}{2C_0^2}\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - 2a_c\int_{r_0}^{r}\mathrm{e}^{2a_c(t-r)}\ln\left(\frac{t}{r_0}\right)\mathrm{d}t\right] \tag{5.3.9}$$

代入(5.3.6)式，可得

$$\begin{aligned}U^{(2)}(z,\tau) = \frac{\beta\omega r_0 u_0^2}{2C_0^2}&\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right.\\ &\left.-2a_c\int_{r_0}^{r}\mathrm{e}^{2a_c(t-r)}\ln\left(\frac{t}{r_0}\right)\mathrm{d}t\right]\sin 2\omega\tau\end{aligned} \tag{5.3.10}$$

将(5.3.4)式和(5.3.10)式代入(5.3.1)式，得到二级近似解为

$$\begin{aligned}U(Z,\tau) = u_0\Bigg\{&\mathrm{e}^{-a_c(r-r_0)}\sin\omega\tau + \frac{\beta\omega r_0 u_0}{2C_0^2}\mathrm{e}^{-2a(r-r_0)}\sin 2\omega\tau\\ &\left[\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - 2a_c\int_{r_0}^{r}\mathrm{e}^{2a_c(t-r)}\ln\left(\frac{t}{r_0}\right)\mathrm{d}t\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{5.3.11}$$

上式的前二项即为纳乌戈尔奈赫(Наугольных)的结果。为了使得逐步近似解收敛,要求(5.3.11)式中的第一项的振幅比第二项的振幅大得多,即

$$\frac{\beta\omega r_0 u_0}{2C_0^2}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\mathrm{e}^{-a_c(t-r_0)}\ll 1 \tag{5.3.12}$$

这即为纳乌戈尔奈赫解的应用条件,但我们得到的结果还表明,除了上述条件以外,还必须要求(5.3.11)式右边第三项与第二项比较可以忽略,即

$$\left|2a_c\int_{r_0}^{r}\mathrm{e}^{-2a_c(r-t)}\frac{\ln t-\ln r_0}{\ln r-\ln r_0}\mathrm{d}t\right|\ll 1$$

或者

$$\left|\int_0^{r-r_0}\mathrm{e}^{-2a_c x}\left[1+\frac{1}{\ln(r/r_0)}\ln\left(1-\frac{x}{r}\right)\right]\mathrm{d}x\right|\ll\frac{1}{2a_c} \tag{5.3.13}$$

由积分第二中值定理可知,(5.3.13)式可以写成

$$2a_c\left.\frac{\ln(r-x)-\ln r_0}{\ln r-\ln r_0}\right|_{x=0}\int_0^{\xi}\mathrm{e}^{-2a_c x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-2a_c\xi}\ll 1$$

式中,ξ 满足不等式 $0\leqslant\xi\leqslant r-r_0$,要求 $1-\mathrm{e}^{-2\alpha_c\xi}\ll 1$ 满足,则要 $2\alpha_c\xi\ll 1$ 因此,如果

$$r-r_0\ll\frac{1}{2a_c} \tag{5.3.14}$$

成立,则上述要求一定能满足。(5.3.14)式表明,$r-r_0$ 要离老年区很远。将这一条件代入(5.3.12)式,可得

$$r\ll 2x_s\cdot\left(\frac{r}{r_0}\right)\Big/\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

或者

$$r\ll r_0\mathrm{e}^{2x_s/r_0} \tag{5.3.15}$$

式中，x_s 为平面波的冲击波形成距离。利用关系式 $u=\frac{r_0}{r}U$，便可得到 u 的二级近似下的表达式，从所得结果可见，二阶谐波振幅在近处随距离增长，达到某个距离之后，再单调随距离减小。

现在来讨论柱面发散波的情况，这时(5.3.8)式的解为

$$Y(z)=\frac{\beta\omega u_0^2}{2C_0^2}\mathrm{e}^{-2a_c(r-r_0)}\int_{r_0}^{r}\mathrm{e}^{2a_c(t-r_0)}\sqrt{\frac{r_0}{t}}\mathrm{d}t \tag{5.3.16}$$

积分之后代入(5.3.6)式，应用 $u=\sqrt{\frac{r_0}{r}}U$ 可得

$$\begin{aligned}u=&u_0\sqrt{\frac{r_0}{r}}\mathrm{e}^{-2a_c(r-r_0)}\sin\omega\tau\\&+\frac{\beta\omega u_0^2 r_0}{C_0^2}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}}-1\right)\mathrm{e}^{-2a_c(r-r_0)}\sin 2\omega\tau+R(r)\sin 2\omega\tau\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

式中

$$\begin{aligned}R(r)=&\frac{\beta\omega u_0^2 r_0}{C_0^2}\left\{\sqrt{\frac{r_0}{r}}[1-\mathrm{e}^{-2a_c(r-r_0)}]\right.\\&\left.-\frac{2a_c}{\sqrt{r_0}}\int_{r_0}^{r}\mathrm{e}^{-2a_c(r-t)}t^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\right.\end{aligned} \tag{5.3.18}$$

利用逐步近似法时，其收敛条件应为

$$\frac{\beta\omega u_0 r_0}{C_0^2}\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}}-1\right)\mathrm{e}^{-a_c(r-r_0)}\ll 1 \tag{5.3.19}$$

由(5.1.5)式中 z 的定义式可知，条件(5.3.12)式和(5.3.19)式可以用一个统一表示式

$$\frac{\beta\omega u_0}{2C_0^2}z\mathrm{e}^{-a_c(r-r_0)}\ll 1$$

来表示。利用积分第二中值定理可以类似地得到，$R(r)$可以忽略的条件是$2\alpha(r-r_0)\ll 1$.

值得提一下的是，纳乌戈尔奈赫的文章中采用的是拉格朗日变量，而本章采用的是欧拉变量，两者互化可以通过(1.6.2)式来完成，可以证明，两者互化的条件是 $kr\gg 1$，这也是他的文章中所要求的条件。

5.4 发散波冲击波[1~5]

在 5.2 节中我们已知，当雷诺数 $Re \gg 1$ 时，忽略耗散项可以得到发散波的黎曼-厄恩肖解，对比平面波的情况，可以预言，当 $\sigma_s > 1$ 时会形成冲击波。下面我们来研究这种冲击波的传播情况。

与平面波黎曼-厄恩肖解相对比可知，当 $\sigma_s > 1$ 时，(5.2.4)式会发展成冲击波，我们将沿袭上两章的方法，很方便地求出结果来。从方程(5.1.6)可知

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\beta}{C_0^2} U \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{b}{2\rho_0 C_0^3} \sqrt{\frac{A}{A_0}} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}$$

如果上式左端的第一项可以忽略，并且要求方程的解满足边界条件

$$U(z, \tau = -\infty) = -U_0, \quad U(z, \tau = \infty) = U_0 \tag{5.4.1}$$

我们将得到一个稳定形状的解，从这个解容易求得

$$U(z, \tau) = U_0 \tanh\left(\beta U_0 \tau \Big/ \left(\frac{b}{\rho_0 C_0} \right) \sqrt{\frac{A}{A_0}} \right) \tag{5.4.2}$$

从这个解式容易算出忽略 $\dfrac{\partial U}{\partial z}$ 的条件

$$\frac{2\beta^2 U_0^2 \rho_0}{bC_0 \dfrac{A}{A_0} \dfrac{\partial}{\partial r}\left[\ln\left(\dfrac{A_0}{A} \right) \right]} \gg 1$$

对于球面波，$\dfrac{A}{A_0} = \dfrac{r^2}{r_0^2}$，于是上述条件为

$$\frac{\rho_0 \beta^2 U_0^2 r_0^2}{bC_0 r} \gg 1 \tag{5.4.3}$$

对于柱面波，上述条件可写为

$$\frac{2\rho_0 \beta^2 U_0^2 r_0^2}{bC_0} \gg 1 \tag{5.4.4}$$

如果用平面波的冲击波形成距离 x_s 来量度所有的长度单位，则可以定义下述量：

$$\frac{\beta U_0 \omega}{C_0^2} r = \frac{r}{x_s} = \sigma(r) \tag{5.4.5}$$

以及

$$\frac{\beta U_0 \rho_0 C_0}{b\omega} = Re^* \tag{5.4.6}$$

式中, $Re^*=\beta Re$, Re 为雷诺数，因 β 也是 1 的数量级，今后也将称 Re^*为雷诺数，并简单表之以 Re 根据这些关系，条件(5.4.3)式和(5.4.4)式分别写成

$$\sigma(r) \ll \sigma^2(r) Re \tag{5.4.7}$$

和

$$2\sigma(r_0) Re \gg 1 \tag{5.4.8}$$

由此可见，对于发散球面波来说，存在一个极限距离 $\sigma(r_l)$，在比这个距离小很多的区域内，存在一个形如 (5.4.2)式的稳定波形，超过这个距离，解(5.4.2)不成立，或者说，$\frac{\partial U}{\partial z}$ 不再可以忽略。而由(5.4.7)式可以看出，如果声源半径的大小与 x_s 相差不多，而且雷诺数 Re 很大时，这个极限距离实际上是很大的，不妨定义这个距离为

$$\sigma(r_l) = \sigma^2(r_0) Re \tag{5.4.9}$$

当 $\sigma(r) \geqslant \sigma(r_l)$ 时，(5.1.6)式中的 $\frac{\partial U}{\partial z}$ 与其他项比较不再能忽略，于是形成上述稳定波形的条件不具备。此外，对比平面波的结果可知，当(5.2.6)式的左端等于 $\pi/2$ 时，锯齿波生成，这就可以粗略地定义发散球面波的冲击波区域的范围：

$$\sigma(r_0) e^{\frac{\pi}{2}\sigma(r_0)} < \sigma(r) < \sigma^2(r_0) Re \tag{5.4.10}$$

显然，当 $\sigma(r_0)$很小时，波形稳定区是很窄的。

由(5.2.4)式和(5.2.6)式可知

$$\omega\tau = -\arcsin\left(\frac{U}{U_0}\right) + \sigma_s \frac{U}{U_0} \tag{5.4.11}$$

根据这个式子可以计算球面冲击波振幅随距离衰减的关系.设冲击波面在 $\omega\tau = 0$ 处形成，这时 $U=U_1$，于是

$$\sin\left(\sigma_s \frac{U_1}{U_0}\right) = \frac{U_1}{U_0}$$

当 $\sigma_s \gg 1$ 时，在上式中令 $\sigma_s U_1/U_0 = \pi - \delta$, δ 很小，则上式成为

$$\sin(\pi - \delta) = \sin\delta \approx \delta = \frac{U_1}{U_0}$$

于是有

$$U_1 = \frac{\pi U_0}{1+\sigma_s} \tag{5.4.12}$$

对照平面波情况下的(4.2.24a)式，利用(5.4.2)式及(5.4.12)式，可以近似地得到球面波在(5.4.10)式定义的区域内的近似解

$$\frac{u}{u_0} \cdot \frac{r}{r_0} = \frac{1}{1+\sigma(r_0)\ln(r/r_0)}\left[-\omega\tau + \pi\tanh\left(\frac{\omega\tau}{\varDelta_s}\right)\right] \tag{5.4.13}$$

式中

$$\varDelta_s = \frac{1+\sigma(r_0)\ln(r/r_0)}{\pi Re}\left(\frac{r}{r_0}\right) \tag{5.4.14}$$

对于柱面波来说，完全类似地得到

$$\frac{u}{u_0}\sqrt{\frac{r}{r_0}} = \frac{1}{1+2\sigma(r_0)\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}}-1\right)}\left[-\omega\tau + \pi\tanh\left(\frac{\omega\tau}{\varDelta_c}\right)\right] \tag{5.4.15}$$

式中

$$\varDelta_c = \frac{1+2\sigma(r_0)\ln(r/r_0)}{\pi Re}\sqrt{\frac{r}{r_0}} \tag{5.4.16}$$

可以用图 5.1 来描述有限振幅发散波的传播情况。

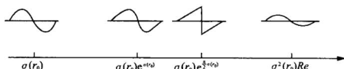


图 5.1　发散波的传播过程

类似于平面波情况，可以将(5.4.13)式和(5.4.15)式展成傅里叶级数，相应的法伊解可以表示成下述统一表达式：

$$u=\frac{u_0}{Re}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\omega\tau}{\sinh\left[n\frac{1+z_s}{2Re}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\theta}\right]} \tag{5.4.17}$$

$$\theta=\begin{cases}0, & 平面波\\ \dfrac{1}{2}, & 柱面波\\ 1, & 球面波\end{cases} \tag{5.4.18}$$

式中，z_s 为各自冲击波形成距离。

5.5　芬 伦 理 论[6, 7]

当 $Re \gg 1$ 时，伯格斯方程如(5.2.1)式所示，即

$$\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\beta}{C_0^2}U\frac{\partial U}{\partial \tau}=0 \tag{5.5.1}$$

令

$$x=\frac{\beta}{C_0^2}U_0 z,\ V=\frac{U}{U_0} \tag{5.5.2}$$

式中，U_0 为参考速度，于是(5.5.1)式可变换成

$$\frac{\partial V}{\partial x}-V\frac{\partial V}{\partial \tau}=0 \tag{5.5.3}$$

根据算子展开法，解可表为

$$V(x,\tau)=\frac{\exp[x\mathrm{D}_\tau V(0,\tau)]-1}{x\mathrm{D}_\tau} \tag{5.5.4}$$

式中

$$\mathrm{D}_\tau=\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{5.5.5}$$

如取声源函数 $V(0,\tau)$是正弦波，则算符解为

$$V(x,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{nx}\mathrm{J}_n(nx)\sin n\tau \tag{5.5.6}$$

这即为贝塞尔-富比尼解。

芬伦(Fenlon)将这个方法推广到多频情况。如果声源是由两个角频率的正弦波组成，则将 $V(x,\tau)=V(x,\tau_1,\tau_2)$展成二重傅里叶级数，即

$$V(x,\tau_1,\tau_2)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}V_{mn}(x)\exp\left[\mathrm{j}(n\tau_1+m\tau_2)\right] \tag{5.5.7}$$

式中

$$\tau_i=\omega_i\tau, i=1,2 \tag{5.5.8}$$

根据傅里叶系数定理，有

$$V_{nm}(x)=\begin{cases}0, & n=m=0\\ \dfrac{1}{4\pi}\iint_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\exp\left[\mathrm{j}(n\omega_1+n\omega_2)\times V(0,\tau_1,\tau_2)\right]}{\mathrm{j}(n\omega_i+n\omega_2)} & \\ \exp[-\mathrm{j}(n\tau_1+n\tau_2)]\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2, & n,m\text{不同时同时为零}\end{cases} \tag{5.5.9}$$

例如，声源的振动可表示为

$$V(0,\tau_1,\tau_2)=V_{01}\sin(\tau_1+\varphi_1)+V_{02}\sin(\tau_2+\varphi_2) \tag{5.5.10}$$

$$V_{0i}=\frac{U_{0i}}{U_0} \tag{5.5.11}$$

φ_1,φ_2为初位相。将这些结果代入(5.5.7)式，便得

$$
\begin{aligned}
V(x,\tau_1,\tau_2) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{J}_n\left[(n\omega_1+m\omega_2)xV_{01}\right]\mathrm{J}_m\left[(n\omega_1+m\omega_2)xV_{02}\right]}{\mathrm{j}(n\omega_1+m\omega_2)x} \\
&\quad \times\exp\left[jn(\tau_1+\varphi_1)+\mathrm{j}m(\tau_2+\varphi_2)\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\omega_1 x}\mathrm{J}_n(n\omega_1 xV_{01})\mathrm{J}_0(n\omega_1 xV_{02})\sin(n\omega_1\tau+n\varphi_1) \\
&\quad +\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{m\omega_2 x}\mathrm{J}_0(m\omega_2 xV_{01})\mathrm{J}_m(n\omega_2 xV_{02})\sin(m\omega_2\tau+m\varphi_2) \\
&\quad +\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{(n\omega_1+m\omega_2)x}\mathrm{J}_n\left[(n\omega_1+m\omega_2)xV_{01}\right] \\
&\quad \times\mathrm{J}_m[(n\omega_1+m\omega_2)xV_{02}]\sin\left[(n\omega_1+m\omega_2)\tau+(n\varphi_1+m\varphi_2)\right] \\
&\quad +\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2(-1)^m}{(n\omega_1-n\omega_2)x}\mathrm{J}_n[(n\omega_1-m\omega_2)xV_{01}] \\
&\quad \times\mathrm{J}_m[(n\omega_1-n\omega_2)xV_{02}]\sin\left[(n\omega_1-m\omega_2)\tau+(n\varphi_1-m\varphi_2)\right]
\end{aligned}
\tag{5.5.12}
$$

(5.5.12)式可以看成是推广了的贝塞尔–富比尼解，前两项是两个频率成分的各阶谐波，后两项是和差频组合波。由此可见，芬伦的多频理论将谐波理论与组合波理论连成了统一的表达式，这是该理论的优点。但也需提一下，这个理论是从伯格斯方程出发的，回顾一下后者的推导可知，它只精确到二级近似，这就使芬伦理论只限于二级近似或者只限于二阶谐波及二阶组合波有意义，高阶相互作用波没有意义。

很多文献[8~10]利用这一理论讨论了声与声的相互作用，如用有限振幅声波去抑制另一个声波取得了较好的结果。图 5.2 表示理论与实验比较的结果，被抑制的

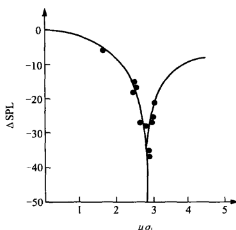


图 5.2　声抑制声的理论与实验比较

高频弱声的频率为 $f_2 = 4023\text{Hz}$，声级 SPL2 = 109dB，而低频强声的频率为 $f_1 = 899\text{Hz}$，声级的变化范围为 0~150dB，图中的点为实验值，曲线为理论结果，当 $\mu\sigma_1 \approx 2.83$ 时弱声受到最大抑制。

参考文献

[1] Наугольных K A. O поглощении звуковых волн конечной амплитуды. *Акуст* Ж, 1958, 4: 115~124

[2] Наугольных K A, Солуян C И, Хохлов P B. Сферические волн конечной амплитуды в вязкой темлопроводящей среде. Акуст Ж, 1963, 9：54~60

[3] Cary B B. Nonlinear losses induced in spherical waves. Jour Acoust Soc Am, 1967, 42: 88~92

[4] Lockwood J C. Finite-amplitude wave effects in fluids.*In*: Bjorno L. Proc Symp. Copenhagen. IPC Science and Technology Press Ltd, 1973. 55

[5] Rudenko O V, Soluyan S I. Theoretical foundations of nonlinear acoustics. New York: Consultants Bureau. 1977

[6] Fenlon F H. A recursive procedure for computing the nonlinear spectral interactions of progressive finite-amplitude waves in nondispersive fluids. Jour Acoust Soc Am, 1971, 50: 1299~1312

[7] Fenlon F H. An extension of the Bessel-Fubini series for a multiple-frequency CW acoustic source of finite amplitude. Jour Acoust Soc Am, 1972, 51: 284~289

[8] 朱哲民，杜功焕，龚秀芬. 有限振幅声波非线性传播畸变消除的研究. 声学学报, 1981, 6：189~193

[9] 杜功焕， 龚秀芬. 在强无规噪声场中有规声能量的抑制.声学学报, 1984, 9：129~133

[10] 龚秀芬，朱哲民，杜功焕. 有限振幅与小振幅平面声波的非线性相互作用研究. 南京大学学报(自然科学版), 1979, (3): 19~28

第 6 章　频散介质中的有限振幅波

在这以前我们讨论的介质是没有频散效应的。所谓频散介质是指这样一种介质，当不同频率的波在其中传播时，相应的波速不一样。由于介质的频散，致使一个脉冲的波包在传播过程中逐渐散开。首先要区分两类频散。当频率增高时波速增加的频散称为正频散，而波速减小的频散称为负频散。

除了频散引起波速依赖于频率以外，非线性效应实质上也间接引起波速依赖于频率。因为由黎曼-厄恩肖解可知，有限振幅波传播的速度为 $C_0+\beta\mu$, β 是介质的非线性系数, C_0 是介质的小振幅波传播速度, u 是介质质点速度, u 大的地方波传播得快, u 小的地方波传播得慢, u 为负的地方，有限振幅波比小振幅波传得更慢。在有限振幅正弦波畸变的最初阶段，基波振幅大，非线性畸变产生的各阶谐波振幅较小，故在正半周部分，基波传播得快，谐波传播得慢，这就间接引起负频散效应；而在负半周部分, u 是负的，于是就间接引起正频散效应。

因为有限振幅波传播速度为 $C_0(f)+\beta u(f)$，其中 f 是频率，将 $C_0(f)$ 展开为

$$C_0(f)=C_0(f_0)+\left(\frac{\partial C_0}{\partial f}\right)_{f_0}(f-f_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 C_0}{\partial f^2}\right)_{f_0}(f-f_0)^2+\cdots$$

由此可见，如果介质是负频散的，它对波的影响是，在正半周加快形成冲击波，而在负半周则延缓或阻止形成冲击波；如果介质是正频散的，上述结论要颠倒。因此，频散介质将一列对称的有限振幅波畸变为不对称的扰动。如果介质的频散效应与非线性引起的间接频散效应相互抵消时，则一个有限振幅的扰动将保持它的稳定形状向前传播，这种扰动称为孤波，这种波远在1834年就被斯柯特-拉塞尔(Scott-Russel)等所观察到[1]。

根据克拉默斯 (Kramer)和克勒尼希 (Kronig)关系[2]可知，频散是伴随着弛豫吸收的，因此，只有当吸收很小时才有可能形成孤波。另一种频散是由边界引起的，如水波及其他波导空间引起的频散，本章我们仅讨论由于弛豫现象引起的频散介质。

当介质中存在分子过程、化学反应过程等，声波传播时不仅激发分子的平动自由度，而且有一部分声能激发分子的转动自由度和振动自由度，各个自由度之间要建立一个新的平衡态。同样当介质中出现某种(或某一些)化学物质，声波扰动了原来的化学平衡(如改变了化学反应速率或者改变了电离平衡态)，各种化学成

分之间要建立新的平衡态，由旧态过渡到新态需要一段时间，这段时间相应于弛豫时间，后者用 τ_r 表示之。在这段时间内介质经历了一个不可逆过程，因而伴随着能量耗散，或者说出现了弛豫吸收[3, 4]，正如前面提到过，弛豫吸收又伴随着频散现象。当声波的周期比 τ_r 大很多，即 $\omega\tau_r \ll 1$ 时，因为弛豫时间很短，故可认为整个过程是处于热力学平衡态，而当 $\omega\tau_r \gg 1$，即声波周期比 τ_r 短很多，即在一个声波周期内，内部自由度还来不及激励，于是形成所谓内部过程冻结，这两种极端情况吸收都较小，频散效应也不显著。只有当声波的频率满足 $\omega\tau_r \sim 1$，吸收出现弛豫峰，对应于弛豫峰附近出现较明显的频散。根据弛豫吸收的热力学理论，弛豫介质中的声吸收系数 α 和声速 C 由下列式子表示，即

$$\alpha = \frac{m}{2C_0\tau_r}\frac{\omega^2\tau_r^2}{1+\omega^2\tau_r^2}$$

$$C^2 = C_0^2\left\{1+\frac{m\omega^2\tau_r^2}{1+\omega^2\tau_r^2}\right\}$$

式中

$$m = \frac{C_\infty^2 - C_0^2}{C_0^2}$$

式中，C_0 为 $\omega\tau_r \to 0$ 时的声速，C_∞ 为 $\omega\tau_r \to \infty$ 时的声速，图 6.1 表明一个波长的声吸收以及声速的平方对 $\omega\tau_r$ 的曲线。

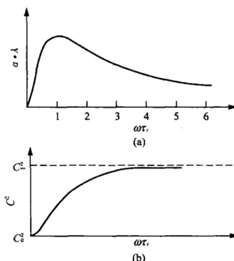


图 6.1　(a)一个波长的吸收系数与 $\omega\tau_r$ 的关系；(b)声速的平方与 $\omega\tau_r$ 的关系

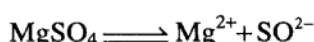
6.1　弛豫介质中物态方程的修正[5]

在黏滞热传导流体中，我们曾经得到修正了的物态方程(1.9.19)，在那里我们考虑了介质的黏滞和热传导损失，这些损失引起的小振幅声吸收与频率成平方关系(见(4.2.5)式)，传播速度与频率无关，因此，它们对冲击波的影响是使得其间断面具有一定的厚度(不是无限薄)，但并不改变波形的对称性。而对于弛豫介质来说，问题就不那么简单了，为了研究它的影响，我们不妨忽略黏热吸收，这样做不会损害其普遍性，因为黏热损失在这里不产生明显的频散。

在只有一种内部过程或者一种化学反应过程的介质中，除了宏观的热力学变量外，还要引入新的独立变量 ξ，于是压力 P 可表示为

$$P = P(\rho, S, \xi) \tag{6.1.1}$$

式中，ρ 和 S 分别为密度和熵，ξ 为内部过程变量，例如，在只有一种化学反应的介质中，ξ 可以是某种分子(或者离子)的浓度。在没有声波扰动时，密度 $\rho=\rho_0$，$\xi=\xi_{00}$，ξ_{00} 称为静平衡态浓度，如在 $MgSO_4$ 溶液中存在化学反应



$$MgSO_4 \rightleftharpoons Mg^{2+} + SO^{2-}$$

在达到化学平衡时，$MgSO_4$ 的浓度为 ξ_{00}，设这时的离解度是 χ_0，则 Mg^{2+} 或者 SO_4^{2-} 的浓度为 $\chi_0\xi_{00}$。当溶液中有声波传播时，其瞬时浓度为 ξ，它和时间 t 有关，这时旧的平衡态被破坏，但介质通过一个不可逆过程向新的平衡态 ξ_0 靠近。如果声波按规律 $e^{-j\omega t}$ 变化，则 ξ_0 也在 ξ_{00} 附近作简谐变化，于是有

$$\xi_0 = \xi_{00} + \xi_0'$$

$\xi_0' \sim e^{-j\omega t}$，将 $\dfrac{d\xi}{dt} = \dot{\xi}$ 按$(\xi - \xi_0)$的幂展开到一次方项，于是得到反应速率方程为

$$\dot{\xi} = -\left(\frac{\xi - \xi_0}{\tau_r}\right) \tag{6.1.2}$$

再将(6.1.1)式展成 $\rho'=\rho-\rho_0$ 和$(\xi-\xi_0)$的幂级数，并认为过程是等熵的，于是有

$$P = P_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\xi_0} \rho' + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho_2}\right)_{\xi_0} \rho'^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_{\rho_0} (\xi - \xi_0) \tag{6.1.3}$$

现在用热力学方法来推导$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\xi_0}$的表达式。众所周知，具有一个内变量的热力学系统的压力为

$$P = P(\rho, S, \xi)$$

当它处于静平衡时，$\rho = \rho_0$, $S = S_0$, $\xi = \xi_{00}$，如果一个声扰动出现，则$\rho = \rho_0 + \mathrm{d}\rho$, $S = S_0 + \mathrm{d}S$, $\xi = \xi_{00} + \mathrm{d}\xi$，于是压力$P = P_0 + \mathrm{d}P$，而

$$\mathrm{d}P = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S_0,\xi_{00}} \mathrm{d}\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{\rho_0,\xi_{00}} \mathrm{d}S + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_{\rho_0,S_0} \mathrm{d}\xi$$

当扰动使介质很快达到新的平衡状态时，内变量平衡值是ρ, S的函数，即$\xi_0 = \xi_0(\rho, S)$，于是

$$\mathrm{d}\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial \rho}\right)_{S_0} \mathrm{d}\rho + \left(\frac{\partial \xi}{\partial S}\right)_{\rho_0} \mathrm{d}S$$

代入上式，得

$$(\mathrm{d}P)_0 = \left[\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S_0,\xi_{00}} + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_{\rho_0,S_0} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \rho}\right)_{S_0}\right]\mathrm{d}\rho$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{\rho_0,\xi_{00}} + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_{\rho_0,S_0} \left(\frac{\partial \xi}{\partial S}\right)_{S_0}\right]\mathrm{d}S$$

式中，$(\mathrm{d}P)_0$表示压力扰动达到平衡值的意思，这时介质处于$\xi = \xi_0$这个状态，故右端第一个方括号中的项成为$(\partial P/\partial \rho)_{S=S_0,\xi=\xi_0}$，第二方括号中的量应表示为$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S=S_0,\xi=\xi_0}$，于是在等熵过程中，有

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\xi_0} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\xi_{00}} + \left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_{\rho_0} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial \rho}\right)_{S_0} \tag{6.1.4}$$

式中，$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\xi_0}$这一个声速平方项，它是在$\xi_0$不变时$P$对$\rho$的导数，由于$\xi_0$是经过声扰动之后达到的新平衡的内部变量，$\xi_0$不变显然相应于$\omega\tau_r \to 0$时的情形，即

$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\xi_0}=C_0^2$，同理$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\xi_{00}}=C_\infty^2$，相应于 $\omega\tau_r\to\infty$ 时的量。

将(6.1.3)式对 t 求导数，注意下述几个关系，即 $\xi_0=\xi_0(\rho, S)$, $\rho=\rho_0+\rho'$, ρ_0 与 t 无关，过程是等熵的，应用(6.1.4)式，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}t}=C_\infty^2\frac{\mathrm{d}\rho'}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\xi_0}\rho'\frac{\mathrm{d}\rho'}{\mathrm{d}t}+\left(\frac{\partial P}{\partial \xi}\right)_{\rho}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} \tag{6.1.5}$$

式中，$P'=P-P_0$，由(6.1.2)式，(6.1.3)式和(6.1.5)式消去 ξ，并利用(6.1.4)式可得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau_r}\right)P'=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\tau_r}\right)\left[C_0^2\rho'+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\xi_0}\rho'\right]+mC_0^2\frac{\mathrm{d}\rho'}{\mathrm{d}t} \tag{6.1.6}$$

上式有解

$$P'=C_0^2\rho'+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial P^2}\right)_{\xi_0}\rho'^2+mC_0^2\int_{-\infty}^{t}\frac{\mathrm{d}\rho'}{\mathrm{d}t'}\mathrm{e}^{-(t-t')/\tau_r}\mathrm{d}t' \tag{6.1.7}$$

对上式右端最后一项进行分部积分，最终可得

$$P'=C_\infty^2\rho'+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\xi_0}\rho'^2-\frac{mC_0^2}{\tau_r}\int_{-\infty}^{t}\rho'\mathrm{e}^{-(t-t')/\tau_r}\mathrm{d}t' \tag{6.1.8}$$

这就是既包括非线性效应又包括弛豫效应的物态方程，它表明，弛豫过程对热力学量的贡献是 t 时刻以前时间间隔内的影响的叠加。为了阐明这个问题，我们对(6.1.2)式进行积分，即可得到

$$\xi=\xi_0+(\xi_{00}-\xi_0)\mathrm{e}^{-t/\tau_r}$$

这个式子表明，在 t 时刻的某个扰动使瞬时分子浓度并非很快就能达到新的平衡浓度 ξ_0，严格说，要经过无限长的时间才能达到，因此，任一时刻的 ξ 值必然有过去时刻的长时间的贡献。

6.2　有限振幅波在弛豫介质中的传播[5~11]

为了研究弛豫介质的影响，这里忽略黏滞热传导损失，于是运动方程和连续性方程成为

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)=0$$

物态方程取(6.1.7)式或(6.1.8)式。作伴随坐标变换

$$y=t-\frac{x}{C_0}$$

根据以前的推导原则，相应的伯格斯方程成为

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\beta}{C_0^2}u\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{m}{2C_0}\frac{\partial}{\partial y}\int_{-\infty}^{y}\frac{\partial u}{\partial y'}\mathrm{e}^{-(y-y')/\tau_r}\mathrm{d}y' \tag{6.2.1}$$

将上式对 y 微分后乘以 2，并将所得结果与(6.2.1)式相加得到

$$\tau_r\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\beta}{C_0^2}u\frac{\partial u}{\partial y}\right]+\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\beta}{C_0^2}u\frac{\partial u}{\partial y}\right]=\frac{m\tau_r\partial^2 u}{2C_0\partial y^2} \tag{6.2.2}$$

上式求准确解是困难的，下面我们来求稳定波形，即在(6.2.2)式中忽略 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的项，于是有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+\frac{u^2}{2\tau_r}+\frac{mC_0}{2\beta}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right]=0 \tag{6.2.3}$$

初始条件 $y\to\infty$ 时，$u=u_0$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=0$，(6.2.3)式满足这些条件的解为

$$\frac{y+y_0}{\tau_r}=\ln\frac{(1+u/u_0)^{D-1}}{(1-u/u_0)^{D+1}} \tag{6.2.4}$$

$$D=\frac{m}{2\beta M_0} \tag{6.2.5}$$

在一般情况下，u 与 y 可能出现多值函数关系，因而就有可能出现间断。当 $D\gg 1$ 时，(6.2.4)式简化为

$$u=u_0\tanh\left(\frac{y+y_0}{2D\tau_r}\right) \tag{6.2.6}$$

这时 u 与 y 的关系是以 $y=-y_0$ 处为对称的单值曲线，图 6.2 描述了这些关系，图 6.2(a)是 $D \gg 1$ 的情形，图 6.2(b)D 减小但大于 1，图 6.2(c)表示可能出现多值函数的情形。

为了进一步阐明弛豫机理对有限振幅波传播的影响，现在来考虑有限振幅正弦波，即

$$u = u_0 \sin y$$

为了使方程归一化，作下述变换：

$$\vartheta = \omega y,\quad \sigma = \beta k M_0 x, U = \frac{u}{u_0}$$

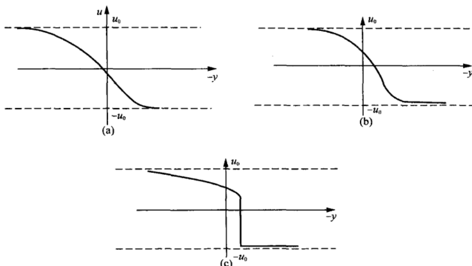


图 6.2　稳定波形图

(a)$D \gg 1$; (b)$D > 1$; (c)$D < 1$

代入(6.2.1)式，得到

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} - U\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = D\frac{\partial}{\partial \vartheta}\int_{-\infty}^{\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \vartheta'} e^{\frac{\vartheta-\vartheta'}{\omega\tau_r}} \mathrm{d}\vartheta' \tag{6.2.7}$$

上式是一个积分微分方程，求解不易，下面我们取 $\omega\tau_r \ll 1$ 的近似，这时积分号下的指数函数是快变函数，$\dfrac{\partial U}{\partial \vartheta'}$ 可以展开为

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta'}=\frac{\partial U}{\partial \vartheta}+\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}(\vartheta'-\vartheta)+\cdots$$

代入(6.2.7)式，可得

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma}-U\frac{\partial U}{\partial \vartheta}=D\left[\omega\tau_{\mathrm{r}}\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}-\omega^2\tau_{\mathrm{r}}^2\frac{\partial^3 U}{\partial \vartheta^3}\right] \tag{6.2.8}$$

容易看出，上式右端第一项是由弛豫吸收引起的(它正比于 $\omega\tau_{\mathrm{r}}\to 0$ 时的弛豫吸收系数)，第二项是频散的贡献，根据吸收系数的相加性，一个既包括弛豫吸收又包括黏热吸收的广义伯格斯方程可以唯象地得到，即

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma}-U\frac{\partial U}{\partial \vartheta}=D\left[\left(\omega\tau_{\mathrm{r}}+\frac{2\alpha_c}{u_0 km}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \vartheta^2}-\omega^2\tau_{\mathrm{r}}^2\frac{\partial^3 U}{\partial \vartheta^3}\right] \tag{6.2.8a}$$

式中，α_c 为介质的黏热吸收系数，(6.2.8a)式称为 KdVB(Korteweg deVries-Burgers)方程。如果没有弛豫现象，则上式退化为伯格斯方程。如果吸收可以忽略，则(6.2.8a)式成为 KdV 方程，它的解是一维孤立波或简称孤波，它是在20世纪末科特韦格(Korteweg)-德夫里斯(deVries)为了解释斯科特-拉塞尔观察到的奇突现象所提出来的著名方程，关于这个问题将在以后仔细研究。

在(6.2.8a)式中如果 $\omega\tau_{\mathrm{r}}=0$ 或者弛豫效应可以忽略不计，则它的解完全相同于第 4 章所讨论过的几种情况，特别是 $\Gamma \gg 1$ 时，形成有限厚度的冲击波。如果(6.2.8a)式的右端很小，则我们可以仿效 4.2 节和 5.4 节，利用稳定波形(6.2.4)加上一项线性项(参考图 4.2)来近似描述该问题的解。仿照 4.2 节和 5.4 节，从稳定波形(6.2.4)可以解出

$$\frac{u}{u_0}=\frac{\pi}{1+\sigma}f\left(\frac{\omega y}{\Delta}\right) \tag{6.2.9}$$

$$\Delta=2\omega\tau_{\mathrm{r}}\frac{D(1+\sigma)}{\pi} \tag{6.2.10}$$

加上线性项后，全部近似解为

$$\frac{u}{u_0}=\frac{1}{1+\sigma}\left\{-\omega y+\pi f\left(\frac{\omega y}{\Delta}\right)\right\} \tag{6.2.11}$$

图 6.3 给出了 $D>1$ 和 $D<1$ 时的波形，不对称的波形是可以预料到的。

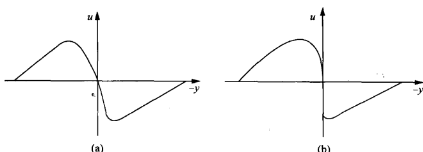


图 6.3　频散介质中正弦波(一个周期)的畸变

(a) $D>1$；(b) $D<1$

现在来讨论 $\omega\tau_{\mathrm{r}} \gg 1$ 的情况。这时，(6.2.7)式右端积分号下的指数项是慢变函数，将它作级数展开：

$$\exp\left(-\frac{\vartheta-\vartheta'}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}\right)\approx 1+\frac{\vartheta'-\vartheta}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}+\cdots$$

代入(6.2.7)式，得到

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma}-U\frac{\partial U}{\partial \vartheta}=D\left(\frac{\partial U}{\partial \vartheta}-\frac{U}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}\right) \tag{6.2.12}$$

作下述变换：$\sigma'=\sigma$，$\vartheta'=\omega t-\dfrac{x}{C_{\infty}}=\vartheta+kx\left(1-\dfrac{C_0}{C_{\infty}}\right)\approx\vartheta+D\sigma$ 于是

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}=\frac{\partial}{\partial \sigma'}+D\frac{\partial}{\partial \vartheta'},\quad \frac{\partial}{\partial \vartheta}=\frac{\partial}{\partial \vartheta'}$$

代入上式，得到

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma'}-U\frac{\partial U}{\partial \vartheta'}=-\frac{DU}{\omega\tau_{\mathrm{r}}} \tag{6.2.13}$$

对于正弦波源来说，边界条件为 $\sigma'=0$, $U=\sin\vartheta'$ 令

$$U-\frac{D}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}\vartheta'=V$$

代入(6.2.13)式，得到

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma'}+\left(V+\frac{D}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}\vartheta'\right)\frac{\partial V}{\partial \vartheta'}=0 \tag{6.2.14}$$

因 $V=V'(\sigma',\ \vartheta')$，于是由上式可得

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \sigma'}\right)_V=-\left(V+\frac{D}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}\vartheta'\right) \tag{6.2.15}$$

对上式进行一次积分，可得

$$\sigma'=-\int\frac{\mathrm{d}\vartheta'}{V+\frac{D}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}\vartheta'}+f_1(V)=-\frac{\omega\tau_{\mathrm{r}}}{D}\left\{\ln\left[\left(V+\frac{D}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}\vartheta'\right)\Big/F(V)\right]\right\}$$

或者

$$U\mathrm{e}^{\frac{D\sigma'}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}}=F\left(U-\frac{D}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}\vartheta'\right) \tag{6.2.16}$$

代入正弦边界条件以及当 $D=0$ 时化归黎曼-厄恩肖解，于是有

$$U\mathrm{e}^{\frac{D\sigma'}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}}=\sin\left[\vartheta'+\frac{\omega\tau_{\mathrm{r}}}{D}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-D\sigma'}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}}\right)U\mathrm{e}^{\frac{D\sigma'}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}}\right] \tag{6.2.17}$$

取 $U\mathrm{e}^{\frac{D\sigma'}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}}$ 为横坐标，ϑ' 为纵坐标可以作出如图 2.5 那样的图示，取 $\vartheta_1'=\arcsin\left(U\mathrm{e}^{\frac{D\sigma'}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}}\right)$，$\vartheta_2'=zU\mathrm{e}^{\frac{D\sigma'}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}}$，这里

$$z=\frac{\omega\tau_{\mathrm{r}}}{D}\left(1-\mathrm{e}^{\frac{-D\sigma'}{\omega\tau_{\mathrm{r}}}}\right) \tag{6.2.18}$$

是 ϑ_2' 直线的斜率，$z\geqslant1$ 时可能形成冲击波，但由于 $D\neq0$，当 σ'足够大时，使得

$$z\approx z_\infty=\frac{\omega\tau_{\mathrm{r}}}{D}=2\beta Ma\omega\tau_{\mathrm{r}}m$$

定义

$$Ma_c = \frac{1}{\beta\omega\tau_r}\frac{m}{2}$$

如果 $Ma < M_c$，则在整个距离恒有 $z<1$，从而形不成冲击波，即在频散较强的介质中，由于波包散开很快，仅当波的马赫数超过其临界值 M_c，才可能形成冲击波。

6.3　KdV 方程的解与弧波[1]

在(6.2.8a)式中如果吸收项可以忽略，则得到

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} - U\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -D\omega^2\tau_r^2\frac{\partial^3 U}{\partial \vartheta^3} \tag{6.3.1}$$

(6.3.1)式是 KdV 型的方程，现在我来求它的行波解。令

$$\xi = \sigma - C_0\vartheta \tag{6.3.2}$$

以及

$$U(\sigma,\vartheta) = \phi(\sigma - C_0\vartheta) \tag{6.3.3}$$

代入(6.3.1)式，得到

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \frac{C_0}{2}\frac{\partial \phi^2}{\partial \xi} = DC_0^3\omega^2\tau_r^2\frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3}$$

积分一次得

$$A + \phi + \frac{C_0}{2}\phi^2 = DC_0^3\omega^2\tau_r^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} \tag{6.3.4}$$

式中，A 是积分常数，将上式两边乘以 $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}$，再进行一次积分，得到

$$B + A\phi + \frac{1}{2}\phi^2 + a\phi^3 = b\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 \tag{6.3.5}$$

式中

$$a = \frac{C_0}{6},\quad b = \frac{1}{2}DC_0^3\omega^2\tau_r^2 \tag{6.3.6}$$

再对(6.3.5)式积分一次，得到

$$\xi-\xi_0=\frac{1}{\sqrt{b}}\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{B+A\phi+\frac{1}{2}\phi^2+a\phi^3}} \tag{6.3.7}$$

这是一个椭圆积分，其解可以用椭圆函数表示。无损于一般性，我们讨论下述情况下的扰动，即当$|\xi|\to\infty$时及其导数为零，于是两个积分常数A=B=0, (6.3.7)式成为

$$\xi-\xi_0=\sqrt{\frac{2}{b}}\int_{\phi_0}^{\phi}\frac{\mathrm{d}\phi}{\phi\sqrt{1+2a\phi}} \tag{6.3.8}$$

上述积分容易积出，为

$$\xi-\xi_0=-2\sqrt{\frac{2}{b}}\operatorname{artanh}\sqrt{1-\phi}$$

或者

$$\phi=\frac{1}{2a}\operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{2}}(\xi-\xi_0)\right] \tag{6.3.9}$$

图 6.4 作出了ϕ或者 U 对ξ的关系曲线，由这个图可以看出，曲线是钟形对称的，扰动集中在$\xi=\xi_0$的附近的局部区域，远离此点没有扰动，故称这种扰动为孤波。(6.3.1)式表明，它不含吸收项，只有频散和非线性效应，任何初始扰动在这种介质中传输时，非线性要使它形成冲击波，而频散要使它的波包散开，两种效应最终达到相互补偿，从而形成一个形状不变的稳定的局部扰动向前传播，这就是这种孤波形成的机理。水中的孤波远在 1834 年就为斯科特-拉塞尔观察到，他看到，两匹马拉一条船沿一条运河向前行驶，然后让船突然停止，出现一个水峰继续向前，行走很长一段路在拐弯处消失，这个水峰即为孤波。这一现象直到 1894 年 KdV 方程的解这篇著名的文章发表才得到解释。

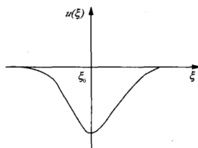


图 6.4　孤波的波形

满足粒子条件的孤波称为孤子(soliton)，它不仅以水波的形式存在，也出现在固体和其他凝聚态中，关于这个问题已成为非线性物理的一个新的研究分支。关于孤子将在第 15 章中作进一步讨论。

参 考 文 献

[1] Scolt A C, Chu F Y F, Mclaughlin D W. The soliton: a new concept in applied science. Proc IEEE, 1973, 61: 1443~1482

[2] Jackson J D. Classical electrodynamics. 2nd ed. New York: Wiley, 1975

[3] Markham J J, Beyer R T, Lindsay R B. Absorption of sound in fluids. Reviews of Mod Phys, 1951, 23: 353~411

[4] 钱祖文. 化学反应媒质中的声吸收理论及关于 $MgSO_4$ 水溶液的弛豫机构.物理学报，1962, 18: 501~508

[5] Rudenko V, Soluyan S I. Theoretical foundations of nonlinear acoustics. New York: Consultants Bureau, 1977

[6] 梅强中. 水波动力学. 北京：科学出版社, 1984

[7] Whitham G B. Linear and nonlinear waves. New York: John Wiely and Sons, Inc, 1974

[8] Du G H. Fourier series solution of Burgers' equation for nonlinear acoustics in relaxting media. Jour Acoust Soc Am, 1985, 77: 924~927

[9] Karman V I. Nonlinear waves in dispersive media. Pergamon: 1973

[10] Landau L D. Fluid mechanics. Vol.6. New York: Course of Theoretical Physics Pergamon, 1959

[11] Полякова А Л, Солуян С И, Хохлов Р В. К копросу о распространении конечных в релаксирующей сред. Акуст Ж, 1962, 8：107~112

第 7 章　有界空间的有限振幅波

前几章我们讨论了无界空间的有限振幅波的传播，唯一的边界条件就是声源本身的条件，那时曾经表明，在冲击波形成之前，波的表示式是富比尼解，各阶波的振幅可表示为

$$B_n(\sigma) = \frac{2\mathrm{J}_n(n\sigma)}{n\sigma}$$

详细的表示式见(2.3.9)式和(2.3.10)式。这个结果告诉我们，当 $n\sigma \ll 1$ 时，$B_n(n\sigma) \propto (n\sigma)^{n-1}$，谐波的振幅随距离增长，即在传播过程中它们似乎不断得到分布性能源补充。而在冲击波形成之后，波的表示式是法伊解，(4.2.18)式表示其修正了的表达式，与富比尼解不同的是，其中的各阶谐波振幅随距离减小。

如果在各阶谐波的传播路径上出现边界面，则边界要对它们产生反射、散射等过程，这时除了要求波服从声源的边界条件外，还要服从上述边界面的边界条件，经边界反射或散射之后的波再服从有限振幅波的传播规律。一般说，在一个单频的有限振幅波入射到边界面时，边界本身的反射或散射过程会产生各阶谐波，如一列有限振幅入射波会激励起边界的非线性振动，这些振动作为二次声源可以辐射除了入射波成分以外的各阶谐波，这就说明有限振幅波的边值问题颇为复杂，本书将不讨论这种复杂情况，而是假设边界过程本身不改变波的频率成分。

本章我们将用逐步近似法求解，在求解过程中，可以明确地看出，高阶谐波的波源是低阶谐波的贡献，也就是说，不考虑高阶谐波的能量向低阶谐波转移的问题。

7.1　有限振幅驻波[1]

下面首先讨论一维问题。在第 2 章，我们导出了拉格朗日坐标系下的波动方程：

$$\frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial a^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial t^2} = 0 \tag{7.1.1}$$

$$\frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial a^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \xi^{(2)}}{\partial t^2} = 2\beta \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial a}\frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial a^2} \tag{7.1.2}$$

式中，$\xi^{(1)}$和 $\xi^{(1)}$分别为一阶和二阶位移。首先讨论两个平行不动硬壁之间的驻波问题，设它们之间的距离是 l，因此，边界条件为：当 $a=0, l$ 时，有

$$\xi^{(1)}=\xi^{(2)}=0 \tag{7.1.3}$$

显然，满足(7.1.1)式和(7.1.3)式的解为

$$\xi^{(1)}=A\sin ka \cdot \sin \omega t$$

式中，$k=\omega/c_0$，ω 满足 $\omega l/c_0=\pi$。将上解代入(7.1.2)式右端，有

$$2\beta\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial a}\frac{\partial^2 \xi^{(1)}}{\partial a^2}=-\frac{\beta}{2}k^3A^2\sin 2ka(1-\cos 2\omega t)$$

因而方程(7.1.2)的解为

$$\xi^{(2)}=\frac{\beta}{8}kA^2\sin 2ka\,[\,1-\omega t\sin 2\omega t+D_1\sin 2\omega t+D_2\cos 2\omega t\,] \tag{7.1.4}$$

式中，D_1, D_2 为任意常数。当 $t=0$ 时，二阶谐波尚未产生，显然有

$$v^{(2)}\big|_{t=0}=\left.\frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial t}\right|_{t=0}=\xi^{(2)}\big|_{t=0}=0$$

代入(7.1.4)式得到，$D_1=0, D_2=1$。由(7.1.4)式可以看出，驻波的二阶谐波的振幅有一项是正比于时间 t 的所谓长期项，表明谐波振幅随时间增长。另外，还有一项其振幅与时间无关的项，以后将被略去，于是质点速度可写为

$$v=v^{(1)}+v^{(2)}=v_0\sin ka \cdot \cos \omega t-\frac{\beta v_0^2}{4c_0}\sin 2ka \cdot \omega t \cdot \cos 2\omega t \tag{7.1.5}$$

当然，二阶谐波随时间增长不是无限制的，也就是说只是在很短的开始一段时间内长期项才有意义，否则将是不稳定的解，如果考虑到介质有耗散，足以消耗掉能量积累，这种现象将会消失。

7.2　有限振幅共振器

我们讨论的共振器是局限于管中的气柱，它的一端($a=0$)有一个等效活塞能源，它按

$$\xi\big|_{a=0}=\xi_0\cos \omega t \tag{7.2.1}$$

振动，而另一端与大气相通，即在 $a=l$ 时，压力为大气压 P_0，由理想气体的绝热物态方程及拉格朗日一维连续性方程可知

$$P=P_0(1+\xi_a)^{-\gamma}$$

因此，在 $a=l$ 处 $P=P_0$ 的边界条件等效于

$$\xi_a|_{a=l}=0 \tag{7.2.2}$$

故方程组(7.1.1)，(7.1.2)，(7.2.1)和(7.2.2)是本问题在二级近似下的全部定解条件，显然有

$$\xi^{(1)}=\xi_0\frac{\cos(l-a)k}{\cos lk}\cos\omega t \tag{7.2.3}$$

将这个式子代入(7.1.2)式，求出满足

$$\xi^{(2)}|_{a=0}=0,\quad \left(\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial a}\right)_{a=l}=0$$

的解：

$$\xi^{(2)}=\frac{\beta}{8}\frac{k\xi_0^2}{\cos^2 kl}\left\{\sin 2k(l-a)-\sin 2kl+2ka\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\sin 2ka}{2\cos 2kl}-ka\cos 2k(l-a)\right]\cos 2\omega t\right\} \tag{7.2.4}$$

显然，当

$$\cos kl=0$$

或者当

$$\lambda^{(1)}=\frac{4l}{2n-1},\quad n=1,2,3,\cdots \tag{7.2.5}$$

时，一阶波和二阶波都共振，其中 $\lambda^{(1)}$ 为一阶共振波长，由于本节讨论的二阶波的能源是一阶波，故一阶波共振时二阶波也共振，除此以外，(7.2.4)式还给出另一个共振波长，它满足

$$\cos 2kl=0$$

或者

$$\lambda^{(2)}=\frac{8l}{2n-1}, \quad n=1,2,3,\cdots \tag{7.2.6}$$

称之为二阶波共振波长。如果我们在推导波动方程组时取到更高阶波的近似，类似可以求高阶波的共振波长。

应当指出，由(7.2.3)式和(7.2.4)式可知，在一阶共振时，由于 $\cos^2 kl$ 趋于零的阶数高于 $\cos kl$，这表明二阶波的量级比一阶波高，故在一阶共振时，逐步近似收敛的条件遭到破坏。同理可知，当满足(7.2.6)式时，二阶波共振，但一阶波却不共振，这时，逐步近似法可应用的条件亦不满足。尽管如此，上述结果作为定性的指导原则还是有意义的。

通过非线性过程，除了基波共振以外，高 Q 的共振器还产生谐波共振。对于有耗散的共振器，如果其 Q 足够高，只要输入功率超过它的耗散功率，它的各阶谐波就会积累能量，并向更高阶谐波转移，故非线性共振器又含倍频器的功能。因此，闭合空间的非线性声学是很有趣的领域，由于数学方法的限制，我们目前还不能对它进行深入研究。

7.3　有限振幅波在边界面上的反射[2~7]

以前几章我们只讨论非线性声传播的一维问题，本节要讨论二维和三维问题，但仅限于半空间情况。我们从二维的拉格朗日方程组(1.1.4)和(1.1.11)出发，并将其写成矩阵和行列式的形式，即将运动方程、连续性方程和物态方程分别写成

$$\begin{pmatrix} 1+\xi_a & \eta_a \\ \xi_b & 1+\eta_b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_{tt} \\ \eta_{tt} \end{pmatrix}=-\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix} P_a \\ P_b \end{pmatrix} \tag{7.3.1}$$

$$\rho_0=\rho\begin{vmatrix} 1+\xi_a & \xi_b \\ \eta_a & 1+\eta_b \end{vmatrix} \tag{7.3.2}$$

$$P=P_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\Gamma} \tag{7.3.3}$$

式中，a, b 为拉格朗日变量，ξ, η 为沿此二方向的位移，Γ 为常数，对于气体经历一个绝热过程，它是比热比，对于液体，(7.3.3)式是所谓泰特(Tait)方程，Γ 与非线性系数 β 的关系

$$\beta=\frac{\Gamma+1}{2}$$

仍成立。逐步近似求解时，令

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi^{(0)} + \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \cdots \\ \eta &= \eta^{(0)} + \eta^{(1)} + \eta^{(2)} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{7.3.4}$$

将上式代入前 3 个方程组，令同阶量相等得到如下的结果。对于一阶量，有

$$\left.\begin{aligned} \xi_{tt}^{(1)} &= c_0^2[\,\xi_{aa}^{(1)} + \eta_{ab}^{(1)}\,] \\ \eta_{tt}^{(1)} &= c_0^2[\,\xi_{ab}^{(1)} + \eta_{bb}^{(1)}\,] \end{aligned}\right\} \tag{7.3.5}$$

对于二阶量，有

$$\left.\begin{aligned} \xi_{tt}^{(2)} - \xi_{aa}^{(2)} - \eta_{ab}^{(2)} = c_0^2 \Big\{ & -2\eta_a^{(1)}\xi_{ab}^{(1)} - \eta_a^{(1)}\eta_{bb}^{(1)} + \eta_b^{(1)}\xi_{aa}^{(1)} + \eta_b^{(1)}\eta_{ab}^{(1)} \\ & - \xi_b^{(1)}\eta_{aa}^{(1)} + (\Gamma + 1)\,[\xi_{aa}^{(1)}\xi_a^{(1)} + \eta_{ab}^{(1)}\eta_b^{(1)}] \\ & - \Gamma\,[\xi_{aa}^{(1)}\eta_b^{(1)} + \eta_{ab}^{(1)}\xi_a^{(1)}] \\ \eta_{tt}^{(2)} - \xi_{ab}^{(2)} - \eta_{ab}^{(2)} = c_0^2 \Big\{ & -\xi_b^{(1)}\xi_{aa}^{(1)} - 2\xi_b^{(1)}\eta_{ab}^{(1)} + \xi_a^{(1)}\xi_{ab}^{(1)} + \xi_a^{(1)}\eta_{bb}^{(1)} \\ & - \xi_{bb}^{(1)}\eta_a^{(1)} + (\Gamma + 1)[\xi_{ab}^{(1)}\xi_a^{(1)} + \eta_{bb}^{(1)}\eta_b^{(1)}] \\ & - \Gamma\,[\xi_{ab}^{(1)}\eta_b^{(1)} + \eta_{ab}^{(1)}\xi_a^{(1)}]\Big\} \end{aligned}\right\} \tag{7.3.6}$$

引入位移势

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial \varphi}{\partial a} \\ \eta &= \frac{\partial \varphi}{\partial b} \end{aligned}\right\} \tag{7.3.7}$$

以及

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \cdots$$

代入(7.3.5)式和(7.3.6)式容易得到

$$\varphi_{tt}^{(1)} = c_0^2(\varphi_{aa}^{(1)} + \varphi_{bb}^{(1)}) \tag{7.3.8}$$

以及

$$\left.\begin{aligned}\Box^2\varphi^{(2)}=\Big\{&-\frac{3}{2}[\varphi_{ab}^{(1)}]^2-\frac{1}{2}(y_1+y_2)-\Gamma\varphi_{aa}^{(1)}\varphi_{bb}^{(1)}\\&-\frac{2\Gamma+1}{4}[(\varphi_{aa}^{(1)})^2+(\varphi_{bb}^{(1)})^2]\Big\}\\&\frac{1}{2}\left\{[\varphi_{bb}^{(1)}]^2-[\varphi_{aa}^{(1)}]^2\right\}-(y_1-y_2)=0\end{aligned}\right\}\tag{7.3.9}$$

(7.3.9)式中的第二个式子称为相容条件，因它是引入一个 φ 代替两个位移分量时所必须满足的条件，而

$$\left.\begin{aligned}y_1&=\int(\varphi_{aa}^{(1)}\varphi_{bbb}^{(1)}-\varphi_{bb}^{(1)}\varphi_{aaa}^{(1)})\,\mathrm{d}a\\y_2&=\int(\varphi_{ab}^{(1)}\varphi_{aaa}^{(1)}-\varphi_{aa}^{(1)}\varphi_{bbb}^{(1)})\,\mathrm{d}b\end{aligned}\right\}\tag{7.3.10}$$

$\Box^2$ 为达朗贝尔算符。

上述结果表明，一阶场满足通常的齐次波动方程，属于无源问题，二阶场满足非齐次波动方程，非齐次项仅与一阶场有关，因此，属于有源问题。通常先解一阶场方程，再将所得到的解代入(7.3.9)式和(7.3.10)式，进一步求解二阶场的边值问题，与通常的波动方程求解过程相同，由于有两个任意常数，故需要给出各阶场的边界条件，这里出现一个问题：边界条件如何写？一种写法是对各阶场的总和提出一个总的边界条件，如对于刚性边界位移为零，即

$$\xi(a,b=0)=[\xi^{(1)}+\xi^{(2)}+\cdots]_{b=0}=0\tag{7.3.11}$$

在线性声学中，由于各阶谐波场之间独立，故(7.3.1)式相当于

$$\xi^{(1)}=\xi^{(2)}=\cdots=0\tag{7.3.12}$$

因而定解条件适应。但在非线性领域，各阶谐波场之间不互相独立，这时尽管有(7.3.11)式成立，但不能推出(7.3.12)式，于是出现了两个波动方程，只有一个公用的边界条件(7.3.11)，定解条件还缺一个。为了解决这个问题，我们来分析下述事例。

设有一个平面半空间，如果有一个声源，为简单起见，假设它发射平面正弦波，它的频率为 ω，在传播过程中，由于非线性效应，将会不断产生二阶、三阶……谐波，它们的最初能源是从一阶场获得(为简单起见，下面只讨论到二阶场)，显然，二阶谐波场随传播距离增大而增长，不考虑频散效应，一阶场与二阶场以有限振幅波速传播，当它们达到边界以后，相继遭到反射。当一阶场反射后，继续产生随距离增长的二阶谐波，而入射的二阶场遭到反射后，这部分反射的二阶场不随距离增长，由此可见，二阶谐波由两部分组成，一部分随距离增长，另一

部分不随距离增长，在传播过程中两部分都是由一阶场产生的。正如在本章的开始部分所说的，我们不讨论边界本身的非线性振动，于是在反射时不产生其他频率成分的波，从而得到如下的结论：在边界反射时，入射波和它的反射波以及透射波之间必须是能量守恒，此即为边界只做线性振动时的边界条件。如果边界本身可以产生非线性振动，则边界条件更为复杂。

本书只限于讨论下述情况下的边界反射问题：边界本身不产生非线性振动，非线性过程只在反射前或反射后发生于介质之中，而边界上的反射仍可用反射系数的概念来描写。此外，介质中的二阶谐波除了边界反射产生的那一部分之外，另一部分就是由于反射的一阶波经过非线性过程产生的，但前一部分二阶场除了在边界上反射一次外，它在反射前也是由一阶场经过非线性过程产生的。由此可见，整个二阶场除了一个二阶反射系数之外，它完全取决于一阶场，因而可以得到结论：非线性边界问题中的边界条件除了取决于各阶场的反射系数之外，它们都还取决于一阶场的边界条件。

取坐标系如图 7.1 所示，由入射波和反射波组成的一阶场，其入射角为 θ，可表示为

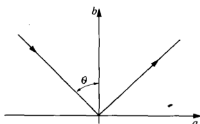


图 7.1　二阶场图示

$$\varphi^{(1)} = (\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 b} + V^{(1)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k_2 b})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t - k_1 a)} \tag{7.3.13}$$

式中，$V^{(1)}$为一阶场的边界反射系数，它可表示为

$$V^{(1)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_1} \tag{7.3.14}$$

$\psi_1=0$ 相当于一阶场的硬边界，$\psi_1=\pi$ 相应于它的软边界，一般情况下，ψ_1 为复数。而 k_1, k_2 分别为沿两个坐标轴方向上的波数，且有

$$k_1^2 + k_2^2 = k^2 \tag{7.3.15}$$

将这些关系代入 (7.3.9)式，首先可以验证，$\varphi^{(1)}$ 满足相容条件，而二阶场满足

$$\Box^2 \varphi^{(2)} = 4[\alpha_1 + \alpha_2 \cos(2k_2 b + \psi_1)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}(\omega t - k_1 a) + \mathrm{j}\psi_1}] \tag{7.3.16}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{4}\{\,(\Gamma-1)\,k^4 + 2k_1^2(k_1^2 - k_2^2)\,\} \\ \alpha_2 &= \frac{\Gamma+1}{4}k^4 \end{aligned}\right\} \tag{7.3.17}$$

显然, (7.3.16)式是$\varphi^{(2)}$的二阶非齐次波动方程, 它的解应包括两部分：一部分是齐次方程的一般解$\varphi_0^{(2)}$；另一部分是非齐次特解$\varphi_1^{(2)}$。后一个解可以写成(求解的方法留待以后讨论)

$$\varphi_1^{(2)} = -\frac{a_1}{k_2^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(k_1a-\omega t+\psi_1/2)} - \frac{\alpha_2}{16}\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right)\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_1+2k_2b)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\psi_1+2k_2b)}\right\}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\left(k_1a-\omega t+\frac{\psi_1}{2}\right)}$$

$$\left. - \frac{a_2}{4\mathrm{j}}\left(\frac{a}{k_1}+\frac{b}{k_2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_1+2k_2b)} + \left(\frac{a}{k_1}-\frac{b}{k_2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\psi_1+2k_2b)}\right\}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(k_1a-\omega t+\psi_1/2)} \tag{7.3.18}$$

现在我们首先讨论上式右端各项的物理意义。将(7.3.13)式写成$\varphi^{(1)} = \varphi_{\mathrm{i}}^{(1)} + \varphi_{\mathrm{r}}^{(1)}$，再利用(7.3.14)式, 于是有

$$\varphi_{\mathrm{i}}^{(1)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t-k_1a+k_2b)}$$

$$\varphi_{\mathrm{r}}^{(1)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k_2b+k_1a-\omega t)+\mathrm{j}\psi_1}$$

它们在非线性过程中产生的自作用项分别为

$$\varphi_{\mathrm{i}}^{(2)} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\omega t-2k_1a+2k_2b)}$$

$$\varphi_{\mathrm{r}}^{(2)} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\omega t-2k_1a-2k_2b-2\psi_1)}$$

它们的相互作用项为

$$\varphi_Q^{(2)} \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\omega t-2k_1a-\psi_1)}$$

由(7.3.18)式容易得到

$$\varphi_{\mathrm{i}}^{(2)} = -\frac{\alpha_2}{4}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right) - \mathrm{j}\left(\frac{a}{k_1}-\frac{b}{k_2}\right)\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\omega t-2k_1a+2k_2b)} \tag{7.3.19}$$

$$\varphi_{\mathrm{r}}^{(2)}=-\frac{\alpha_2}{4}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right)-\mathrm{j}\left(\frac{a}{k_1}+\frac{b}{k_2}\right)\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2(\omega t-k_1a-k_2b-\psi_1)} \tag{7.3.20}$$

$$\varphi_Q^{(2)}=-\frac{\alpha_1}{k_2^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\omega t-2k_1a-\psi_1)} \tag{7.3.21}$$

从(7.3.19)式~(7.3.21)式可知，二阶谐波场是由三部分组成，$\varphi_{\mathrm{i}}^{(2)}$ 相当于“二阶入射波”，它是由一阶入射声场自作用产生的；$\varphi_{\mathrm{r}}^{(2)}$ 相当于“二阶反射场”，它是由一阶反射场的非线性自作用产生的，对比(7.3.13)式可知，在一阶入射场中将 b 用 $-b$ 代替再乘以 $V^{(1)}$即可得到一阶反射场，同样地，在(7.3.19)式中令 $b=-b$，可得

$$\varphi_{\mathrm{r}}^{(2)}=\varphi_{\mathrm{i}}^{(2)}(b=-b)\cdot[V^{(1)}]^2=[V^{(1)}\varphi_{\mathrm{i}}^{(1)}(b=-b)]^2$$

故从形式上看来，这里的等效反射系数是 $V^{(1)}$的平方，由此也能看出，这部分二阶波并非由“二阶入射波”直接产生的，或者说，(7.3.18)式中还不包括边界对“二阶入射场”的反射波，这是因为它是非齐次方程的特解，而真正的二阶反射场应包括在齐次解(7.3.22)的 $\varphi_0^{(2)}$ 中；$\varphi_Q^{(2)}$ 是由于一阶入射波与一阶反射波的非线性相互作用产生的，这是一种新型的波，命名为Q谐波，它的传播方向平行于界面，显然，如声波是有限束，则它仅能够存在于入射波与反射波的公共区内。应当注意的是，$\varphi_{\mathrm{i}}^{(2)}$，$\varphi_{\mathrm{r}}^{(2)}$ 的振幅是随传播距离的增大而增长，这是很显然的，因为它们都是以一阶场为激励源的，而且它们的位相速度等于一阶场的相速，而 $\varphi_Q^{(2)}$ 的相速却不等于一阶场的相速，故没有上述的随距离增长或者积累效应。

现在讨论二阶场的全部解，显然，齐次方程的通解可写为(对比(7.3.13)式)

$$\varphi_0^{(2)}=\left\{\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_2b}+V^{(2)}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_2b}\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(2\omega t-2k_1\alpha)} \tag{7.3.22}$$

式中

$$V^{(2)}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_2} \tag{7.3.23}$$

称为二阶反射系数，于是全部二阶场可表为

$$\varphi^{(2)}=\varphi_{\mathrm{i}}^{(2)}+\varphi_{\mathrm{r}}^{(2)}+\varphi_Q^{(2)}+\varphi_0^{(2)} \tag{7.3.24}$$

式中，$V^{(2)}$要由边界条件来定。将(7.3.13)式及(7.3.24)式对 b 求导，然后令 $b=0$，分别得到一阶场和二阶场的边界质点的法向位移：

$$\eta^{(1)}\Big|_{b=0}=-\mathrm{j}k_2(1-V^{(1)})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega t-k_1\alpha)} \tag{7.3.25}$$

$$\eta^{(2)}\Big|_{b=0}=\frac{\alpha_2}{2}\mathrm{j}k_2\left\{\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k_1^2}+\frac{1}{k_2^2}\right)-\mathrm{j}\frac{a}{k_1}\right]+\frac{1}{2k_2^2}\right\}(1-[V^{(1)}]^2)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2(\omega t-k_1 a)}$$
$$-2\mathrm{j}k_2(1-V^{(2)})\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}(\omega t-k_1 a)} \tag{7.3.26}$$

由(7.3.25)式和(7.3.26)式可见，如果一个刚性边界对一阶场是刚性的，则它对二阶场也是刚性的，这时的问题显得很简单；如果边界对一阶场是非刚性的，则边界上产生的二阶场位移振幅与坐标 a 有关，这意味着透入第二介质的波在边界上的二阶场亦与 a 有关，这样才能满足边界条件，或者说在交界面上，入射波、反射波以透射波满足动量守恒、质量守恒和能量守恒条件。

下面我们来推导(7.3.18)式。为了求解(7.3.16)式，令

$$\varphi_1^{(2)}=\frac{\alpha_1}{k_2^2}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_1 a}+\phi_1 \tag{7.3.27}$$

代入(7.3.16)式，得到 ϕ_1 满足的方程

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial a^2}+\frac{\partial^2\phi_1}{\partial b^2}+4k^2\phi_1=4\alpha_2\cos 2k_2 b\bullet\mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_1 a} \tag{7.3.28}$$

分离变量，令

$$\phi_1=\phi_2(a)\cos 2k_2 b+\phi_3(b)\mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_1 a} \tag{7.3.29}$$

代入(7.3.28)式，可得 ϕ_2，ϕ_3 分别满足的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_2}{\mathrm{d}a^2}+4k_1^2\phi_2=2\alpha_2\mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_1 a} \tag{7.3.30}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_3}{\mathrm{d}b^2}+4k_2^2\phi_3=2\alpha_2\cos 2k_2 b \tag{7.3.31}$$

首先解(7.3.30)式，应用拉格朗日变动常数法，令

$$\phi_2=A_1(a)\mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_1 a}+B_1(a)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_1 a} \tag{7.3.32}$$

式中，$A_1(a)$和 $B_1(a)$为两个待定的量。将(7.3.32)式代入(7.3.30)式，考虑到 ϕ_2 中有两个待定函数，故可以指定一个关系，如令

$$\frac{\mathrm{d}A_1(a)}{\mathrm{d}a}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_1 a}+\frac{\mathrm{d}B_1(a)}{\mathrm{d}a}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_1 a}=0 \tag{7.3.33}$$

于是(7.3.30)式成为

$$\frac{dA_1(a)}{da}e^{2jk_1a}-\frac{dB_1(a)}{da}e^{-2jk_1a}=\frac{a_2}{jk_1}e^{2jk_1a} \tag{7.3.34}$$

由(7.3.33)式和(7.3.34)式解出

$$A_1(a)=\frac{\alpha_2}{2jk_1},\quad B_1(a)=\frac{\alpha_2}{8k_1^2}e^{4jk_1a} \tag{7.3.35}$$

于是有

$$\phi_2=\frac{a_2}{2jk_1}\left(a-\frac{1}{4jk_1}\right)e^{2jk_1a} \tag{7.3.36}$$

同理可得

$$\phi_3=\frac{\alpha_2}{2k_2}b\cdot\sin 2k_2b+\frac{\alpha_2}{8k_2^2}\cos 2k_2b \tag{7.3.37}$$

将(7.3.36)式和(7.3.37)式顺次代入(7.3.29)式和(7.3.27)式，即可得到(7.3.18)式。

对于三维情况下的半空间反射问题，可以得到类似的结果。在二级近似下，希普(Heap)得到了二阶场满足的非齐次波动方程：

$$\Box^2\varphi^{(2)}=-\frac{1}{2C^2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\Box^2(\varphi^{(1)})^2+\frac{2\beta}{C^2}\left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t}\right)^2\right\} \tag{7.3.38}$$

一阶场满足齐次波动方程，故解为

$$\varphi^{(1)}=\left\{e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}}+V^{(1)}(k,\vartheta)e^{-j\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_r}\right\}e^{j\omega t} \tag{7.3.39}$$

式中，$V^{(1)}(k,\ \vartheta)$为一阶反射系数，k 为波数，ϑ 为入射角，而

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}&=k_xx+k_yy-k_zz\\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_r&=k_xx+k_yy+k_zz\\ \boldsymbol{k}&=(k_x,k_y,k_z)\end{aligned}\right\} \tag{7.3.40}$$

C 是声速，β 是介质的非线性系数。令非齐次特解为

$$\varphi_1^{(2)}=\phi_{21}+\phi_{22} \tag{7.3.41}$$

而

$$\Box^2\phi_{21}=-\frac{1}{2C^2}\frac{\partial}{\partial t}\Box^2(\varphi^{(1)})^2 \tag{7.3.42}$$

或者

$$\phi_{21}=-\frac{1}{2C^2}\frac{\partial(\varphi^{(1)})^2}{\partial t} \tag{7.3.43}$$

将这些结果代入(7.3.38)式，可以得到

$$\Box^2\phi_{22}=-\frac{\beta}{C^4}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial t}\right)^2\right] \tag{7.3.44}$$

将(7.3.39)式代入上式，且令

$$\phi_{22}=\{\phi_{221}+\phi_{222}+\phi_{223}\}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}\omega t} \tag{7.3.45}$$

于是(7.3.44)式成为3个方程组，即

$$\nabla^2\phi_{22i}+4k^2\phi_{22i}=\alpha_i\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}kR_i},\quad i=1,2,3 \tag{7.3.46}$$

以及

$$\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{R}_x,\quad \boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{R}\big|_{z=0}=\boldsymbol{r}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1=\frac{2\mathrm{j}\beta\omega^3}{C^4},\quad \alpha_2=\alpha_1[V^{(1)}(k,\vartheta)]^2\\ \alpha_3=2a_1V^{(1)}(k,\vartheta)\end{aligned}\right\} \tag{7.3.47}$$

(7.3.46)式是线性方程，用分离变量法求解，令

$$\phi_{22i}=\psi_{1i}(x,y)\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}2k_zz}+\psi_{2i}(y,z)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_xx}+\psi_{3i}(x,z)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_yy} \tag{7.3.48}$$

若$\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}$，则在指数上取正号，$\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{R}_r$时，取负号，继续用分离变量法，令

$$\left.\begin{aligned}\psi_{1i}&=\psi_{11i}(y)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_xx}+\psi_{12i}(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_yy}\\ \psi_{2i}&=\psi_{21i}(z)\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{j}k_zz}+\psi_{22i}(y)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_yy}\\ \psi_{3i}&=\psi_{31i}(z)\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{j}k_zz}+\psi_{32i}(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_xx}\end{aligned}\right\} \tag{7.3.49}$$

将这些式子代入(7.3.36)式，仍用拉格朗日变动参数法，解得 ϕ_{22i} 并代入(7.3.45)式，得到

$$\phi_{22}=\frac{1}{2}\alpha_1\left\{\frac{V^{(1)}(k,\vartheta)}{k_z}c^{2jk\cdot r}-\frac{1}{2j}\left[\left(\frac{x}{k_x}+\frac{y}{k_y}-\frac{z}{k_z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_x^2}+\frac{1}{k_y^2}+\frac{1}{k_z^2}\right)\right]e^{-2jk\cdot R}\right.$$

$$\left.-\frac{[V^{(1)}(k,\vartheta)]^2}{2j}\left[\left(\frac{x}{k_x}+\frac{y}{k_y}+\frac{z}{k_z}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_x^2}+\frac{1}{k_y^2}+\frac{1}{k_z^2}\right)\right]e^{-2jk\cdot R_r}\right\} \tag{7.3.50}$$

另外，将(7.3.39)式代入(7.3.42)式，可得

$$\phi_{21}=\frac{k}{jC}\left\{2V^{(1)}(k,\vartheta)e^{-2jk\cdot r}+e^{-2jk\cdot R}+[V^{(1)}(k,\vartheta)]^2e^{-2jk\cdot R_r}\right\}e^{2j\omega t} \tag{7.3.51}$$

将 ϕ_{21}，ϕ_{22} 代入(7.3.41)式可以得非齐次特解 $\varphi_1^{(2)}$，再加上齐次通解，即可得到全部解 $\varphi^{(2)}$。从结果可以看出，二阶谐波的非齐次部分亦由三部分组成，即“二阶入射波”、“二阶反射波”和 Q 谐波，前两部分也有积累效应。

7.4 有限波束声源的有限振幅反射波[8]

以上我们讨论的入射波是平面波，但实际上的声源其波束是有限的，这样的入射波束的反射问题颇为复杂，本节我们仅用弱冲击理论来讨论圆形活塞声源的有限振幅反射波。

有一圆形活塞在介质中做正弦振动，它在 $r\geqslant r_0$ 处所产生的介质质点速度为(参见 4.3 节)

$$u(r,\vartheta)=u_0D(\vartheta)\frac{r_0}{r}\sum_{n=1}^{\infty}B_n(\sigma)\sin[n\omega t-nk(r-r_0)] \tag{7.4.1}$$

式中，r，ϑ 为极坐标，u_0 为 $r=r_0$ 处的质点速度，r_0 为活塞的瑞利距离，ω 为角频率，k 为相应的波数，$D(\vartheta)$为活塞的小振幅指向性函数，这里显然假设活塞声源所产生的声场的轴向声压与非轴向声压简单地用 $D(\vartheta)$来联系，σ 是以冲击波形成距离归一化的长度变量，对于球面波来说，有

$$\sigma=Ma\beta D(\vartheta)kr_0\ln\frac{r}{r_0} \tag{7.4.2}$$

式中，Ma 为马赫数，β 为非线性系数，由 4.3 节可知

$$B_n(\sigma)=\frac{2}{n\pi}\sin\Phi_{\min}+\frac{2}{n\pi\sigma}\int_{\Phi_{\min}}^{\pi}\cos[n(\phi-\sigma\sin\phi)]\mathrm{d}\phi$$

$\Phi_{\min}$ 满足

$$\Phi_{\min}=\sigma\sin\Phi_{\min}$$

当 $\sigma<1$ 时，$\Phi_{\min}=0$，且

$$B_n(\sigma)=\frac{2}{n\sigma}\mathrm{j}_n(n\sigma)$$

$\sigma>>1$ 时，$\Phi_{\min}=\pi$，且

$$B_n(\sigma)=\frac{2}{n(1+\sigma)}$$

上述结果是一个活塞声源在无限介质中的有限振幅声场的表示式，如果存在一个边界面，则 n 阶谐波在边界上要产生反射，如活塞产生的 n 阶谐波为

$$u_n=u_0D(\vartheta)\frac{r_0}{r}B_n(\sigma)\sin[n\omega t-nk(r-r_0)] \tag{7.4.3}$$

下面我们将论证，当 $k(r+R)>>1$ 时，(7.4.3)式所表示的入射波将产生反射波

$$u_{nr}^{(1)}\approx\frac{r_0u_0B_n(\sigma_1)D(\vartheta)}{R+r}V(\vartheta_1)\sin[n\omega t-nk(r+R-r_0)] \tag{7.4.4}$$

式中

$$\vartheta_1=\vartheta_0+\vartheta$$

式中，ϑ_0 为换能器主轴方向在边界平面上的入射角，ϑ_1 为波束中任一射线方向的入射角，ϑ 为这一射线方向与主轴的夹角，R 为换能器的中心沿主轴方向到反射面的距离，r 为反射点到场点的距离(图 7.2)，$V(\vartheta)$为平面波的反射系数，σ_1 将留待以后给出。

现在我们来讨论(7.1.4)式的合理性。根据球面波在平面上的反射理论，当 $k(r+R)\gg1$ 时，反射波可用镜像点源函数

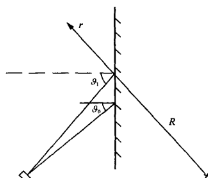


图 7.2　活塞换能器波束的有限振幅反射波

乘以某入射角为 ϑ_0 的平面波反射系数来表示。对于(7.4.4)式所表示的波来说，由于 σ 与距离有关，加之又有指向性函数 $D(\vartheta)$，所以它表示的并不是一个球面波。但由(7.4.2)式可知，σ 与距离是对数关系，而与球面扩展因子是幂关系，如果关系式 $k(r+R)\gg 1$ 能够满足，则(7.4.3)式偏离球面扩展程度不太大，它的反射波可以近似地用(7.4.4)式来表示。另外，对于通常的发射换能器，如果其主瓣宽度不很大，则由反射理论可知(参看布烈霍夫斯基赫的《分层介质中的波》)，则反射系数的模和相角随角度变化不大，这时球面波束的反射可以用一定角度下的平面波反射系数乘以入射波的形式因子来表示，剩下来的问题是如何确定 σ_1。(7.4.3)式中的 r 是从换能器中心到场中任一点的距离，当 $\sigma<1$ 时，$B_n(\sigma)$ 随距离增长，在 $\sigma\gg 1$ 时，随距离减弱。当谐波到达边界，它要遭到反射，故对照(7.4.2)式，应用镜像原理可知

$$\sigma_1 = Ma\beta D(\vartheta)kr_0\ln\frac{R}{r_0} \tag{7.4.5}$$

显然，由(7.4.4)式可知，n 阶谐波在边界面上产生的振动速度为

$$B_n(\sigma_1)u_0D(\vartheta)V(\vartheta_1)\frac{r_0}{R}\sin[n\omega t - nk(R-r_0)]$$

如将边界上的这一振动看成是新的辐射声源，在不考虑非线性效应时，它们在空间的反射波场近似地用(7.4.4)式表示。但由于介质的非线性，这些波在介质中又要产生自己的各阶谐波场，如反射前的第 n 阶谐波场，反射后产生的波场可以根据弱冲击理论(见 4.3 节)求得，即

$$\begin{aligned}V_{nr} = {} & u_0D(\vartheta)V(\vartheta_1)B_n(\sigma_1)\frac{r_0}{R}\frac{R}{R+r}\\ & \times\sum_m B_m(\sigma_2)\sin[mn\omega t - mnk(R+r-r_0)]\end{aligned} \tag{7.4.6}$$

而 σ_2 可以这样得到：由 4.3 节的理论可知，一个球形声源，其半径为 r_0，球面的振速为

$$u = u_0\sin\omega t$$

它在无限介质中产生的非线性声场为

$$u = u_0\frac{r_0}{r}\sum_n B_n(\sigma)\sin n\omega\left(t - \frac{r-r_0}{c}\right)$$

以及

$$\sigma = Ma\beta kr_0 \ln\frac{r}{r_0}$$

对比半空间边界上的反射问题，将被入射声波扰动的那一部分界面作为新的声源，显然有下述对应关系：

$$r_0 \to R,\quad r \to R+r,\quad u_0 \to u_0 D(\vartheta)V(\vartheta_1)B_n(\sigma_1)\frac{r_0}{r}$$

$$\omega \to n\omega,\quad k \to nk,\quad Ma \to MaD(\vartheta)V(\vartheta_1)B_n(\sigma_1)\frac{r_0}{R}$$

由此可得

$$\sigma_2 = MaD(\vartheta)\beta V(\vartheta_1)B_n(\sigma_1)kR\ln\frac{R+r}{R} \tag{7.4.7}$$

故全部谐波反射场可表示为

$$u_r = \frac{u_0 r_0 D(\vartheta)V(\vartheta_1)}{R+r}\sum_{l}\sum_{l/n=\text{整数}} B_n(\sigma_1)B_{l/n}(\sigma_2)\sin[l\omega t - lk(R+r-r_0)] \tag{7.4.8}$$

上式右端第二个求和号是当 l 一定时，对 l/n 为整数的那些谐波的标号求和。

现在定义反射谐波的指向性 $D_{lr}(\vartheta)$如下：

$$D_{lr}(\vartheta)=\frac{D(\vartheta)V(\vartheta_1)\sum\limits_{l/n\text{整数}} B_n(\sigma_1)B_{l/n}(\sigma_2)}{\left[D(\vartheta)V(\vartheta_1)\sum\limits_{l/n=\text{整数}} B_n(\sigma_1)B_{l/n}(\sigma_2)\right]_{\vartheta=0}} \tag{7.4.9}$$

当波束不太宽时，有 $V(\vartheta_1) \simeq V(\vartheta_0)$。在$\sigma_1$，$\sigma_2<1$ 时，可得

$$D_{lr}(\vartheta) \approx [D(\vartheta)]^l \tag{7.4.10}$$

即第 l 阶谐波指向性函数是基波小振幅指向性函数的 l 次幂；　σ_1，$\sigma_2>>1$，反射谐波几乎是无指向性的；在中间距离反射谐波的指向性较为复杂。

(7.4.8)式给出了谐波反射场，结果表明，当$R>r$时，反射谐波场随r减少很慢，实验结果证实了这个论断(图 7.3)图中的○和×是不同次的测量结果，直线是随距离变化的斜率(理论)。

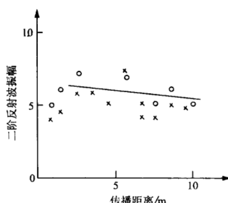


图 7.3　二阶反射谐波随距离的变化

7.5　有限振幅波的折射[9~12]

在 7.3 节我们讨论了有限振幅波在平面边界上的反射，这一节要讨论折射问题，设一阶场的透射势可表示为

$$\varphi_{\text{II}}^{(1)} = W\mathrm{e}^{-\mathrm{j}[\omega t-(l_1 a-l_2 b)]} \tag{7.5.1}$$

式中，l_1，l_2 为第二介质中波数 l 的两个分量(即 $l^2 = l_1^2 + l_2^2$)，W 为一阶势的透射系数。将这个式子代入(7.3.9)式和(7.3.10)式可以得到

$$y_1 = f_1(b) + \frac{1}{2}W^2\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(l_1 a-l_2 b)}(l_2^4 - l_1^2 l_2^2)$$

$$y_2 = f_2(a) + \frac{1}{2}W^2\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(l_1 a-l_2 b)}(l_1^4 - l_1^2 l_2^2)$$

由(7.3.9)式中的相容条件可知

$$f_1(b) = f_2(a) = 0$$

于是在第二介质中二阶谐波场满足

$$\Box^2 \varphi_{\text{II}}^{(2)} = 4A\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}(\omega t-l_1 a+l_2 b)}$$

$$A = \frac{1}{8}(\Gamma_2 + 1)W^2 l^4 \tag{7.5.2}$$

式中，Γ_2 为第二介质的物态常数，为了寻求(7.5.2)式的特解，令

$$\phi_{11}^{(2)} = \varphi(a,b)e^{-2j\omega t} \tag{7.5.3}$$

代入(7.5.2)式可得

$$\phi_{aa} + \phi_{bb} + 4l^2\phi = 4A\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(l_1 a - l_2 b)} \tag{7.5.4}$$

再用分离变量法令

$$\phi(a,b) = \phi_2(a)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}l_2 b} + \phi_3(b)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{j}la} \tag{7.5.5}$$

将(7.5.5)式代入到(7.5.4)式得到

$$\left[\phi_2''(a) + 4l_1^2\phi_2(a)\right]\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}l_2 b} + \left[\phi_3''(b) + 4l_2^2\phi_3(b)\right]\mathrm{e}^{2\mathrm{j}l_1 a} = 4A\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(l_1 a - l_2 b)} \tag{7.5.6}$$

在 7.3 节中，根据(7.3.28)式和(7.3.29)式求得(7.3.30)式和(7.3.31)式时，我们将(7.3.28)式右端的非齐次项对半开之后才得到它们的解。但在一般情况下，没有足够的理由这样做。鉴于这一点，本节将作一般性的讨论，即在(7.5.6)式中，假设

$$\phi_2''(a) + 4l_1^2\phi_2(a) = 4A'\mathrm{e}^{2\mathrm{j}l_1 a} \tag{7.5.7}$$

式中，A' 为待定参数。将(7.5.7)式代入到(7.5.6)式，容易得到

$$\phi_3''(b) + 4l_2^2\phi_3(b) = 4(A - A')\mathrm{e}^{2\mathrm{j}l_2 b} \tag{7.5.8}$$

为了求解(7.5.7)及(7.5.8)这两个非齐次波动方程，我们仍要借助于拉格朗日变动常数法(见 7.3 节)，很容易得到如下的解：

$$\phi_2(a) = A'\left(\frac{a}{\mathrm{j}l_1} + \frac{1}{4l_1^2}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{j}l_1 a} \tag{7.5.9}$$

以及

$$\phi_3(b) = (A - A')\left(-\frac{1}{\mathrm{j}l_2}b + \frac{1}{4l_2^2}\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}l_2 b} \tag{7.5.10}$$

将这两个式子代入到(7.5.5)式就能得到非齐波动方程的特解，将它与齐次波动方程的通解相加，就得到一般解。由于齐次波动方程的通解中包含两个特定常数，它们可以由边界条件来确定，但仍保留了 A' 无法确定，必须寻找其他条件才能使边值问题有唯一确定的解，下面我们将提出一种方法来解决这一难题。

首先，我们假定(7.5.4)式中

$$A=0$$

从而(7.5.4)式成为齐次波动方程，显然，它不存在非零的特解，换句话说，它的特解为零。可是，如果将(7.5.9)式及(7.5.10)式代入到(7.5.5)式，即使令 $A=0$，则这样得到的特解为

$$\phi(a,b)=\left\{A'\left(\frac{1}{\mathrm{j}l_1}a+\frac{1}{4l_1^2}\right)+A'\left(\frac{1}{\mathrm{j}l_2}b-\frac{1}{4l_2^2}\right)\right\}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(l_1a-l_2b)} \tag{7.5.11}$$

即这个解并不为零，除非

$$A'=0$$

否则将出现佯傪。另外，如果在(7.5.7)式和(7.5.8)式中，令

$$\phi_3''(b)+4l_2^2\phi_3(b)=4A''\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}l_2b}$$

则有

$$\phi_2''(a)+4l_1^2\phi_2(a)=4(A-A'')\mathrm{e}^{2\mathrm{j}l_1a}$$

依照上述讨论，如果令 $A=0$，要想不出现上述佯谬，则必须要求

$$A''=0$$

由此可见，在应用分离变量法将方程(7.5.4)的特解写成(7.5.5)式，进一步应用拉格朗日变动常数法求解两个一维的非齐次波动方程时，要想使所求的解不出现佯谬，解(7.5.5)只有下述两种可能的形式：

$$\phi(a,b)=A\left(\frac{a}{\mathrm{j}l_1}+\frac{1}{4l_1^2}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(l_1a-l_2b)} \tag{7.5.12}$$

或

$$\phi(a,b)=A\left(-\frac{b}{\mathrm{j}l_2}+\frac{1}{4l_2^2}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(l_1a-l_2b)} \tag{7.5.13}$$

在这两个解选一个作为特解才能得到唯一的解，而选取的原则是要使一般解满足边界条件，或者说，要借助于边界条件来帮助我们作出选择。为了应用边界连接条件，我们还要进一步讨论第一介质中的非齐次波动方程的特解。

在 7.3 节中，在求(7.3.28)式的解时，应用了分离变量法，得到了(7.3.30)式和

(7.3.31)式，当时，将方程右端的非齐次项对半开。仿效这里的一般讨论，则(7.3.30)式和(7.3.31)式应写成

$$\phi_2''(a) + 4k_1^2\phi_2(a) = 4\alpha' e^{2jk_1a} \tag{7.5.14}$$

及

$$\phi_3''(b) + 4k_2^2\phi_3(b) = 4(\alpha_2 - \alpha')\cos 2k_2 b \tag{7.5.15}$$

仍用拉格朗日变动常数法，为了避免出现佯谬，则只能在下述两组解中选择一组，即(7.2.29)式或者写成

$$\phi_1(a,b) = \alpha_2\left(\frac{1}{jk_1}a + \frac{1}{4k_1^2}\right)e^{2jk_1a}\cos 2k_2 b \tag{7.5.16}$$

或者写成

$$\varphi_1(a,b) = \alpha_2\left(\frac{1}{k_2}b\sin 2k_2 b + \frac{1}{4k_2^2}\cos 2k_2 b\right)e^{2jk_1a} \tag{7.5.17}$$

通常的边界连接条件是指在边界上的力和法向位移必须连续。在线性声学领域中，由于各阶谐波相互独立，只要全部力和全部法向位移连续，就可以使各阶谐波的相应量值在边界上连续，但在非线性声学领域中，各阶谐波并不相互独立，因而不能简单地袭用这个条件。为了解决这个问题，我们不妨回忆一下我们的研究过程。在本书的范围，我们采用了微扰近似，只精确到二级近似，这实际上是，更高阶的量没有被考虑。另外，我们在一阶波中引入了反射系数，这表明一阶场在边界上连续。如果我们认为，各阶场在边界上也分别连续，则整个场在边界上连续，这样得到的解与原来的定解问题没有矛盾，因此，我们可以认为二阶谐波场在边界上连续。在这样的前提下，在两个介质中我们可以写出它们的一般解，它们是齐次通解加上相应的特解，由于特解都有两个供选择，而且每个解中都出现正比于坐标变量的积累项，一个正比于 a，另一个正比于 b。在边界上有 $b=0, a\neq 0$，因此，在特解中出现正比于 a 的解难以满足边界条件，除非再引入特殊假定[10]。但在这里，我们不选择正比于 a 的那组特解，也就是说，在入射波所在的那个介质中，我们选特解为(7.5.17)式，在第二介质中，我们选择(7.5.13)式作为特解。将它们分别与相应的齐次通解相加就给出两种介质中的一般解

$$\varphi_1^{(2)} = \frac{\alpha_1}{k_2^2}e^{2jk_1a} + e^{2j(k_1a - k_2b)}\left[-\frac{\alpha_2}{jk_2}b + Q + D_1\right]$$

$$+\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(k_1 a+k_2 b)}\left[\frac{\alpha_2}{\mathrm{j}k_2}b+Q+D_2\right]V^2 \tag{7.5.18}$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}^{(2)}=\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(k_1 a-k_2 b)}\left[-\frac{A}{\mathrm{j}l_2}b+P+D_3\right] \tag{7.5.19}$$

式中

$$P=\frac{A}{4l_2^2},\quad Q=\frac{\alpha_2}{4k_2^2} \tag{7.5.20}$$

D_1 , D_2 和 D_3 为齐次通解带来的待定常数, Q 和 P 是非齐次解中的非积累项，它们的表达式在(7.5.20)式中给出。二阶场的边界条件为

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}k_2^2\rho_1 V\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(k_1 a-\omega t)}+\rho_1\varphi_{\mathrm{I}}^{(2)}=\rho_2\varphi_{\mathrm{II}}^{(2)}\\ \frac{\partial\varphi_{\mathrm{I}}^{(2)}}{\partial b}=\frac{\partial\varphi_{\mathrm{II}}^{(2)}}{\partial b}\end{aligned}\right\}_{b=0} \tag{7.5.21}$$

将(7.5.18)式和(7.5.19)式代入到(7.5.21)式，可得

$$\left.\begin{aligned}Q+D_1+V^2(Q+D_2)-\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)D_3=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)P-\frac{\alpha_1}{k_2^2}-\frac{1}{2}k_2^2V\\ Q+D_1-V^2(Q+D_2)-\left(\frac{l_2}{k_2}\right)D_3=\left(\frac{l_2}{k_2}\right)P-\frac{A_1}{2l_2k_2}+\frac{\alpha_2}{2k_2^2}(1-V^2)\end{aligned}\right\} \tag{7.5.22}$$

这个式子表明，有 3 个待定常数，只有两个方程，问题不定。如果认为二阶场是一阶场激励起来的，那么可以认为二阶入射场就是与 Q 所对应的那一项，因此，我们可以认为 D_1 为零，计算表明，这样做也存在如下的问题，当

$$V^2=V$$

那当 $V=0, 1$ 时，系数行列式为零，解不存在，这表明，在全透射和全反射的情况下，对应于(7.5.17)式的特解不能解决这两种情况的定解问题。这样使我们想到选用另一特解(7.5.16)，但这时，在边界连接条件的两个表达式中出现了正比于坐标变量 a 的项，使得在确定任意常数时出现困难，当然，全反射和全透射这两种特殊情况实际上很少碰到，但为了理论工作的完备性，这类问题的解决有待进一步完善。

参 考 文 献

[1] Fubini-Ghiron E. Anomalies in the propagation of an acoustic wave of large amplitude. Alta Freq, 1935, **4**: 532~581；Nonlinear acoustics in fluids. Benchmark Papers in Acoustics Series. New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1984.118~177

[2] Qian Z W. Reflection of finite-amplitude sound wave on a plane boundary of half space. Scientia Sinica Series A, 1982, 25: 492~501

[3] Фон Шаосун. Отражение волн коэечной амплитуды. *Акуст Ж*, 1960, 6: 491~493

[4] Blackstock D T. Amer institute of physical hand book. 3rded. Mc Graw-Hill Book Company, 1972. 3~203

[5] Blackstock D T. Normal reflection of finite amplitude plane waves from a rigid wall. Proc 3rd ICA, Stuttgart, 1959. 309~311

[6] Qian Z W. Reflection of finite-amplitude sound wave on a plane boundary of half space (II). Fortschritte der Akustik-FASE/DAGA 82. Teil2, 1982. 821~824

[7] 钱祖文.非线性声学谐波方程的特解及其在边值问题中的应用. 物理学报, 1993, 42：949~953

[8] 钱祖文, 施修祥, 赵春生等. 圆形活塞声源的有限振幅反射波. 物理学报, 1983, 32：1109~1117

[9] Qian Z W, Zheng X Y. Abnormal refraction of finite-amplitude sound wave. Chin Phys Lett, 1989, 6:305~308

[10] Qian Z W, Zheng X Y. Further investigation on reflection and refraction of finite-amplitude sound wave. Chin Phys Lett, 1990, 7: 72~74

[11] 郑晓瑜, 钱祖文. 有限振幅波在平面界面上得到反射和折射. 物理学报, 1990, 39: 89~93

[12] Qian Z W. Reflection and refraction of finite-amplitude sound wave on a plane interface between two solids. Proc 14th ICA, A1-13, Beijing, 1992

第8章 声散射声

根据线性声学理论，如有两束不同频率的波沿着不同的方向传播，则当它们在空间相遇时，彼此之间并不产生相互作用，也就是说，在它们分开之后，就像是什么也没有发生一样。

但从非线性声学观点来看，情况却有所不同。因为当空间有一个波传播时，原来的介质性质在空间受到了这个波的扰动，如果介质原来是均匀的，扰动的结果使之在空间不均匀，这时若在这种被扰动了的介质中还有另一个波，那么，它就要遭到非均匀介质的散射，或者说，一个声波散射另外一个声波，这种现象称为声散射声。

由于这种散射波是由两个波相互作用产生的，故它包含了两个波的信息，或者说它与这两个波的特性有关，因而可以断言，它至少是二阶效应，而且会产生和频波、差频波以及二阶谐波等。是否在任意条件下都会发生声散射声呢？对此我们将作详细分析，由于历史上存在不同观点，本书将分别加以叙述。

8.1 流体动力发声的莱特希尔理论[1, 2]

莱特希尔从一般的流体力学方程组出发，导出了流体动力发声的波动方程，即根据欧拉系的动量方程与张量形式的连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho V_j)}{\partial x_i}=0 \tag{8.1.1}$$

$$\rho\frac{\partial V_i}{\partial t}+\rho V_i\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} \tag{8.1.2}$$

式中，V_i或者 V_j为介质质点速度在 i(或者 j)方向的分量，i(或者 j) =1, 2, 3。按照二级张量的规则，如果式中任一项的两个标号相同，则要对该标号求和，如 $V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ 这一项中要对 j 从 1 到 3 求和，而由 1.4 节可知

$$\Pi_{ij}=p\delta_{ij}-\left(\mu'+\frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ij}\frac{\partial V_l}{\partial x_l}$$

$$-\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\frac{\partial V_j}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\right) \tag{8.1.3}$$

式中，p 为压力，μ' 为第二黏滞系数，μ 为第一黏滞系数，或者称 μ 为切变黏滞系数，$\mu'+\frac{2}{3}\mu$ 为体积黏滞系数，而

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

将(8.1.1)式乘以 V_i 与(8.1.2)式相加，得到

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho V_i V_j)}{\partial x_j}=-\frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j}$$

在上式两边加上一项 $C_0^2\frac{\partial\rho}{\partial x_i}$，则可以得到

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t}+C_0^2\frac{\partial\rho}{\partial x_i}=-\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \tag{8.1.4}$$

式中

$$T_{ij}=\Pi_{ij}+\rho V_i V_j-C_0^2\rho\delta_{ij} \tag{8.1.5}$$

将(8.1.4)式对 x_i 求导，将(8.1.1)式对 t 求导，并将所得结果相减，容易求得

$$\nabla^2\rho-\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=-\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i\partial x_j} \tag{8.1.6}$$

这个结果表明，如果应力张量 T_{ij} 的二阶导数不全为零时，则(8.1.6)式是一个非齐次波动方程，即存在密度波的辐射源。显然，这个方程的解可写为

$$\rho(\boldsymbol{r},t)-\rho_0=\frac{1}{4\pi C_0^2}\int_{\tau R}\frac{\partial^2}{\partial X_i\partial X_j}T_{ij}\left(\boldsymbol{R},t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}{C_0}\right)\frac{\mathrm{d}\tau_R}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|} \tag{8.1.7}$$

式中

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|=\{(x_1-X_1)^2+(x_2-X_2)^2+(x_3-X_3)^2\}^{1/2}$$

式中，$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{R}$ 分别为场坐标矢量和源坐标矢量(图 8.1)，τ_R 为源体积，在这个体积内源函数不为零。现在来讨论解(8.1.7)的物理意义。

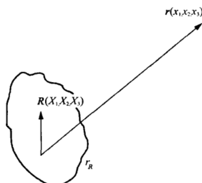


图 8.1 源坐标与场坐标

如果有一个非齐次波动方程的一般形式为

$$\nabla^2\rho-\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\frac{\rho_0}{C_0^2}\frac{\partial q}{\partial t} \tag{8.1.8}$$

那么它的推迟解可写为

$$\rho-\rho_0=\frac{\rho_0}{4\pi C_0^2}\int_{\tau_R}\frac{\partial}{\partial t}q\left(\boldsymbol{R},t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}{C_0}\right)\frac{\mathrm{d}\tau_R}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|} \tag{8.1.9}$$

如果源函数 $q(\boldsymbol{R},t)=q_0\exp[j\omega t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}]$，将它代入(8.1.9)式可以看出，源体积 τ_R 内存在分布性的简谐点源，其源强为 q_0，在 $\boldsymbol{r}$ 点的场是 τ_R 内这些点源的贡献，如果 $q(\boldsymbol{R},t)$不是简谐的，而是一般波形，则可以将它展成傅里叶积分，积分号下的被积函数却是简谐的，如果将(8.1.9)式中的 $q(\boldsymbol{R},t)$换成$\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$，则辐射场(8.1.9)可以看成在 τ_R 内存在分布性的偶极子源在场点的贡献。如果将 $q(\boldsymbol{R},t)$换成$\left(\dfrac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}\right)$，将它代入(8.1.9)式中，则它所表示的辐射场是 τ_R 内分布性的四极子在场点的贡献，根据这些讨论可以知道，莱特希尔积分(8.1.7)表示的辐射场是在源区域内存在分布性的四级子辐射源在场点的叠加所造成的。此外，由(8.1.5)式可见，起伏应力 T_{ij} 是在全部流体应力中扣除线性压力之后剩下来的几部分，其中包括黏滞应力、雷诺应力以及热力学压力的非线性部分。因此，对于理想流体来说，T_{ij} 是二阶量，对于实际流体来说，只要黏滞系数为一阶小量，T_{ij} 仍为二阶量。此外，由(8.1.4)式

和(8.1.5)式可以看出另一个重要事实：即使在理想流体中不存在声波，只要非均匀雷诺应力 $\rho V_i V_j$ 这一项不为零(这里 V_i，V_j 是流体的质点速度，它们不一定是由于声扰动产生的)，则 $\left(\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}\right) \neq 0$，于是(8.1.7)式所表示的辐射场不为零，从而辐射声波，即为所谓流体动力发声的现象。

当场点离源区域很远时，$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|^{-2}$ 很小，于是(8.1.7)式可以简化为

$$\rho-\rho_0 \approx \frac{\rho_0}{4\pi C_0^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\int_{\tau_R} T_{ij}\left(\boldsymbol{R}, t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}{C_0}\right)\frac{\mathrm{d}\tau_R}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|} \tag{8.1.10}$$

上式即为著名的莱特积分的远场表示式，下面给出(8.1.10)式的证明。

在(8.1.7)式中，$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 分别为场坐标和源坐标，而积分号下的变量 $\boldsymbol{R}=(X_1, X_2, X_3)$是源坐标。(8.1.7)式表明，在对 X_i, X_j 求导时，$r=(x_1, x_2, x_3)$和 t 都保持不变。现在我们定义一个微分算符 $\frac{\delta}{\delta X_i}$，它表示在对 X_i，求导数时，保持 t 和 $|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}|$不变，按照这个符号规则，(8.1.7)式中的被积函数为

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}\left[T_{ij}\left(\boldsymbol{R}, t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}{C_0}\right)\right]=\frac{\delta^2}{\delta X_i \delta X_j}\left[\frac{T_{ij}\left(\boldsymbol{R}, \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}{C_0}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}\right] \tag{8.1.11}$$

令

$$\frac{T_{ij}\left(\boldsymbol{R}, \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}}{C_0}\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}=F(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}, t) \tag{8.1.12}$$

根据 $\frac{\delta}{\delta X_i}$ 的定义，在它对函数 $F(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}, t)$进行运算时，要想保持 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|$ 不变，必定要求在对 X_i 求偏导数时，产生 x_i 相应的项才行，即

$$\frac{\delta F}{\delta X_i}=\frac{\partial F}{\partial X_i}+\frac{\partial F}{\partial x_i} \tag{8.1.13}$$

式中，的 $\frac{\partial}{\partial X_i}$ 和 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 为通常的偏导数符号，第一项表示在源坐标变化时保持场坐标不变，第二项则相反。容易验证(8.1.13)式，即如果按照这个式子运算，$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|$的确保持不变，因为

$$\frac{\partial}{\partial X_i}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|=-\frac{\partial}{\partial x_i}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|$$

根据(8.1.10)式，二阶算符为

$$\frac{\delta^2 F}{\delta X_i \delta X_j}=\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial X_j}+\frac{\partial^2 F}{\partial X_i \partial x_j}+\frac{\partial^2 F}{\partial X_j \partial x_i}+\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \tag{8.1.14}$$

将(8.1.11)式~(8.1.14)式代入(8.1.7)式，可得

$$\begin{aligned}\rho(\boldsymbol{r},t)-\rho_0=&\frac{1}{4\pi C_0^2}\int_{\tau_R}\frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j}\left\{\frac{[T_{ij}]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}\right\}\mathrm{d}\tau_R\\&+\frac{1}{4\pi C_0^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\int_{\tau_R}\frac{\partial}{\partial X_i}\left\{\frac{[T_{ij}]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}\right\}\mathrm{d}\tau_R\\&+\frac{1}{4\pi C_0^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\tau_R}\frac{\partial}{\partial X_j}\left\{\frac{[T_{ij}]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}\right\}\mathrm{d}\tau_R\\&+\frac{1}{4\pi C_0^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\int_{\tau_R}\left\{\frac{[T_{ij}]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}\right\}\mathrm{d}\tau_R\end{aligned} \tag{8.1.15}$$

式中

$$[T_{ij}]=T_{ij}\left(\boldsymbol{R},t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{R}|}{C_0}\right) \tag{8.1.16}$$

为 T_{ij} 的推迟式。

显然，(8.1.15)式右端的前 3 个积分中的被积函数总可以表示为相应矢量的散度，如果它们满足散度定理的条件，则可将这 3 个体积分化成沿闭合表面的面积分，即

$$\int \nabla\cdot A\,\mathrm{d}\tau_R=\lim_{R_1\to\infty}\int_{s_{R_1}}A\cdot\mathrm{d}S$$

如果T_{ij}足够光滑且随距离衰减高于一次方，则当$R_1 \to \infty$时，3 个面积分都一致地趋近于零，从而在(8.1.15)式右端只剩下最后一项，它即为(8.1.10)式所表示的莱特希尔远场积分。

8.2　两正交准直束的声散射声[3]

1956 年英加尔德(Ingard)和普赖德莫尔(Pridmore)-布朗(Brown)首先提出了声散射声的概念，他们讨论的是两个准直束的相互作用，两个速度的一阶声场的传播方向是互相垂直的，其定义为

$$V_{11} = V_{11}\cos(k_1 x - \omega_1 t), \quad |y| < a \tag{8.2.1}$$

$$V_{12} = V_{12}\cos(k_2 y - \omega_2 t), \quad |x| < a \tag{8.2.2}$$

式中，ω_1和ω_2为两个波的角频率，k_1和k_2为相应的波数，a为常数，由此可见，所谓准直束实为限制于某个条状域内的平面波。忽略黏滞，利用气体绝热方程作为态方程，将这些关系式代入莱特希尔积分(8.1.10)式，而 T_{ij} 则借助于(8.1.4)式，经过积分运算，最终得到散射压力场为

$$P = C_0^2(\rho - \rho_0) = \frac{\rho_0 V_{11} V_{12}}{8\pi}\frac{(\omega_1 \pm \omega_2)^2}{C_0^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k_1 \pm k_2)r}}{r}a^3$$

$$\times\{\sin 2\vartheta + 2(\Gamma - 1)\}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin\beta}{\beta} \tag{8.2.3}$$

式中，Γ为比热比，“±”号对应于和差频，$r^2 = x^2 + y^2$，$\cos\vartheta = x/r$，以及

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{a}{2}[k_1 - (k_1 \pm k_2)\cos\vartheta] \\ \beta &= -\frac{a}{2}[(k_1 \pm k_2)\sin\vartheta \mp k_2] \end{aligned}\right\} \tag{8.2.4}$$

显然，当$\alpha = \beta = 0$ 时，(8.2.3)式达到极大值，这时定义了二个极大方向

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta &= \frac{k_1}{k_1 \pm k_2} \\ \sin\vartheta &= \pm\frac{k_2}{k_1 \pm k_2} \end{aligned}\right\} \tag{8.2.5}$$

通常将它们称为都卜勒角，在这两个方向上，散射声达到极大值。由(8.2.3)式可以看出，它的右端一般不为零，这说明两正交准直束的相互作用时，在它们的公共区之外有声散射声产生，他们的实验结果也支持了其理论结果。

8.3 两列平面波的声散射声[4~6]

1957 年，韦斯特维尔特发表了两篇文章，对英加尔德等的上述结果表示了不同的看法，他认为上面的理论中(8.2.1)式和(8.2.2)式作为一阶场不满足莱特希尔方程推导条件，因为后者要求一阶场满足齐次波动方程。以后将会看出，准直束不但不满足这个条件，而且在波束界面上出现不连续性的偶极源。

为了避免上述麻烦，韦斯特维尔特选用了平面波作为一阶场，从莱特希尔方程(8.1.6)出发，根据逐步近似方法，得到了一个二阶场所满足的非齐次波动方程，由这个方程的推论，两个非平行波的一阶场在公共区之外不存在二阶散射波，这里所说的推论指两平面波公共区之"外"没有实际意义。下面将介绍他的理论。

对于理想流体，二阶应力张量 T_{ij} 可写成

$$T_{ij} = \rho V_i V_j + p\delta_{ij} - C_0^2(\rho - \rho_0)\delta_{ij} \tag{8.3.1}$$

式中，$p = P - \rho_0 C_0^2$ 为声压，它是流体动压力与静压力之差。将 p 展成 $(\rho - \rho_0)$ 的级数

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}^n P}{\mathrm{d}\rho^n}\right)_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0)^n \tag{8.3.2}$$

为书写简便起见，下面将 $(\rho - \rho_0)$ 写成 ρ_1，而将(8.3.1)式中的 ρ 写为 $\rho_0 + \rho_1$。将(8.3.2)式代入(8.3.1)式，即可得到

$$T_{ij} = (\rho_0 + \rho_1) V_i V_j + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}^n P}{\mathrm{d}\rho^n}\right)_{\rho=\rho_0} \rho_1^n \delta_{ij} \tag{8.3.3}$$

将(8.3.3)式代入(8.1.6)式，并在所得方程中仅保留到二阶项，容易得到

$$\Box^2 \rho_2 = -\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{\rho_0 V_{1i} V_{1j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0} \rho_1^2 \delta_{ij}\right\} \tag{8.3.4}$$

式中，将密度 ρ 写成 $\rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \cdots$，且有

$$\Box^2\rho_1 = \Box^2 V_{1j} = 0 \tag{8.3.5}$$

式中，ρ_2 为二阶密度场，$\Box^2 = \nabla^2 - \dfrac{1}{C_0^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ 为达朗贝尔算子，V_{1j} 为一阶速度场的第 j 个分量。将(8.3.4)式中的量写成矢量，假设流体的流动是无旋的，即认为 $\nabla\times\boldsymbol{V}=0$，于是(8.3.4)式可以改写成

$$\Box^2\rho_2 = -\rho_0 C_0^{-2}\left[(\nabla\cdot V_1)^2 + V_1\cdot\nabla^2 V_1 + \frac{1}{2}\nabla^2(V_1^2)\right] - \frac{1}{2}C_0^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}\nabla^2\rho_1^2 \tag{8.3.6}$$

式中，$\boldsymbol{V}_1$ 为一阶速度场矢量。利用一阶场满足的齐次波动方程(8.3.5)以及相应的连续性方程和运动方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}_1 = -\rho_0^{-1}\frac{\partial\rho_1}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{V}_1}{\partial t} = -\rho_0^{-1}C_0^2\nabla\rho_1$$

代入(8.3.6)式，可得

$$\Box^2\rho_2 = C_0^{-2}\left\{\Box^2 E - \nabla^2\left[2T + \rho_0 C_0^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}\phi\right]\right\} \tag{8.3.7}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\rho_0\boldsymbol{V}_1^2 \\ \phi &= \frac{1}{2}\rho_0^{-1}C_0^2\rho_1^2 \\ E &= T+\phi \end{aligned}\right\} \tag{8.3.8}$$

分别为一阶场的动能密度、势能密度及全部能量密度。

现在将上述结果用于两个一阶场相互作用的情况，这时有

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{V}_1 &= \boldsymbol{V}_{11} + \boldsymbol{V}_{12} \\ \rho_1 &= \rho_{11} + \rho_{12} \end{aligned}\right\} \tag{8.3.9}$$

式中，$\boldsymbol{V}_{11}$ 和 $\boldsymbol{V}_{12}$ 为两个一阶场的速度向量，其中第一个下标表示一阶场的意思，第二个下标表示两个波。将(8.3.9)式代入(8.3.8)式，可得

$$\left.\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\rho_0[\boldsymbol{V}_{11}^2+\boldsymbol{V}_{12}^2+2\boldsymbol{V}_{11}\cdot\boldsymbol{V}_{12}]=T_{11}+T_{22}+T_{12}\\ \phi&=\frac{1}{2}\rho_0^{-1}C_0^2[\rho_{11}^2+\rho_{12}^2+2\rho_{11}\rho_{12}]=\phi_{11}+\phi_{22}+\phi_{12}\end{aligned}\right\}\tag{8.3.10}$$

式中，T_{11}, T_{22} 和 T_{12} 分别为第一个波的一阶动能、第二个波的一阶动能和这两个波的相互作用动能。同理，ϕ_{11}，ϕ_{22} 和 ϕ_{12} 分别为两个波的各自的势能以及它们的相互作用势能。

对于二阶场，我们也作如下的分解(不考虑分频波)：

$$\rho_2=\rho_{21}+\rho_{22}+\rho_s\tag{8.3.11}$$

式中，ρ_{21} 为第一个波的自作用二阶密度场，ρ_{22} 为第二个波的自作用二阶密度场，ρ_s 为两个波的相互作用密度场，前两者相应于二阶谐波场，最后一个相应于和频与差频波场。

将(8.3.10)式和(8.3.11)式代入(8.3.7)式，可以得到 3 个非齐次波动方程式，即两个关于二阶谐波的非齐次波动方程和一个相互作用(和差频)的非齐次波动方程，但我们有兴趣的是声散射声的问题，即两个波的相互作用场，它相应的波动方程可写为

$$\Box^2\rho_s=C_0^{-2}\{\Box^2E_{12}-2\nabla^2[T_{12}+(\beta-1)\phi_{12}]\}\tag{8.3.12}$$

式中，β 为非线性系数，而 $E_{12}=T_{12}+\phi_{12}$。

对于简谐波来说，两个一阶场分别正比于 $e^{j\omega_1 t}$ 和 $e^{j\omega_2 t}$，利用它们的连续性方程和运动方程，容易得到下面几个式子：

$$\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2T_{12}}{\partial t^2}=-C_0^{-2}(\omega_1\pm\omega_2)^{(2)}T_{12}\tag{8.3.13}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi_{12}&=\rho_0^{-1}C_0^2[\rho_{11}\nabla^2\rho_{12}+\rho_{12}\nabla^2\rho_{11}+2\nabla\rho_{11}\cdot\nabla\rho_{12}]\\&=-2\omega_1\omega_2C_0^{-2}\left[T_{12}\pm\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}\phi_{12}\right]\end{aligned}\tag{8.3.14}$$

从这两个式子可得

$$\nabla^2\phi_{12}-\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial t^2}=\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{C_0^2}[T_{12}-\phi_{12}] \tag{8.3.15}$$

另一方面，由

$$\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2\phi_{12}}{\partial t^2}=-\frac{(\omega_1\pm\omega_2)^2}{C_0^2}\phi_{12}$$

以及

$$\nabla^2\phi_{12}=\Box^2\phi_{12}+\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2\phi_{12}}{\partial t^2}=\Box^2\phi_{12}-\frac{(\omega_1\pm\omega_2)^2}{C_0^2}\phi_{12}$$

于是有

$$\nabla^2\phi_{12}-\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial t^2}=\Box^2\phi_{12}-\frac{(\omega_1\pm\omega_2)^2}{C_0^2}\phi_{12}+\frac{(\omega_1\pm\omega_2)^2}{C_0^2}T_{12} \tag{8.3.16}$$

从(8.3.15)式和(8.3.16)式中消去$(T_{12}-\phi_{12})$，最终得到

$$\nabla^2\phi_{12}=\mp\frac{\omega_1^2\pm\omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}\Box^2\phi_{12}+\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial t^2} \tag{8.3.17}$$

但

$$\nabla^2 T_{12}=\Box^2 T_{12}+\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 T_{12}}{\partial t^2}$$

于是有

$$\nabla^2 T_{12}-\nabla^2\phi_{12}=\Box^2\left[T_{12}\pm\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}\phi_{12}\right] \tag{8.3.18}$$

如果两个一阶场都是无限延伸的平面波，它们的传播方向的交角为ϑ，利用运动方程和物态方程，容易得到

$$T_{12}=\phi_{12}\cos\vartheta \tag{8.3.19}$$

代入(8.3.18)式，可以解出

$$\nabla^2\phi_{12}=(\cos\vartheta-1)^{-1}\Box^2\left[T_{12}\pm\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}\phi_{12}\right] \tag{8.3.20}$$

$$\nabla^2 T_{12}=\frac{\cos\vartheta}{\cos\vartheta-1}\Box^2\left[T_{12}\pm\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2\omega_1\omega_2}\phi_{12}\right] \tag{8.3.21}$$

将(8.3.20)式和(8.3.21)式代入(8.3.12)式，并应用(8.3.14)式，可以得到

$$\Box^2\rho_s=\Box^2\left\{C_0^{-2}E_{12}\pm\frac{\cos\vartheta-\beta+1}{(\cos\vartheta-1)\omega_1\omega_2}\nabla^2\phi_{12}\right\} \tag{8.3.22}$$

解可写成

$$\rho_s=C_0^{-2}E_{12}\pm\frac{\cos\vartheta-\beta+1}{(\cos\vartheta-1)\omega_1\omega_2}\nabla^2\phi_{12} \tag{8.3.23}$$

对于和频散射波，上式取正号，对于差频波，上式取负号。(8.3.23)式即为声散射声的韦斯特维尔特简谐平面波相互作用解，或者是一列平面波对另一列平面波的散射解。从这个结果可以看出，如果 $\vartheta\neq0$，则只有在两列波的公共区之内才有 $\rho_s\neq0$，但在公共区之外，$E_{12}=\nabla^2\phi_{12}=0$，使得 $\rho_s=0$，即在公共区之外没有声散射声。韦斯特维尔特所指的声散射声是由非达朗贝尔源函数所产生的，即这种源函数不可以表示成 $\Box^2 f, f$ 是另一个函数。

如果 $\vartheta=0$，尽管在公共区之外 $E_{12}=\nabla^2\phi_{12}=0$，但由于这时(8.3.23)式右端第二项的分母为零，有可能使得公共区外的声散射声不为零，这相当于声参量阵的情形，这个问题将在第 9 章作详细讨论。

由此可见，当两列平面波的传播方向不同时，在公共区之外没有声散射声。应当提一下，尽管韦斯特维尔特的解推导较为严格，条件一般(只是假设一阶场为平面波，流体运动是无旋的)，但由于他使用的一阶场是两个无限延伸的平面波，它们的公共区之“外”是没有实际意义的，因此上述结果所说的“在公共区之外没有声散射声”只能是一种推论，严格说来，实验上是难以验证的。

以上是从波动方程源函数的性质来讨论声散射声的，现在来求韦斯特维尔特方程的解。显然，在二级近似下，方程(8.3.7)的右端总是两个一阶场或者一阶场的导数的乘积(包括它们之间的乘积)，而一阶场都是简谐平面波，面由叠加原理，非齐次波动方程的源项总可以写成一个常数乘以 $\rho_{11}\rho_{12}$ 形式的叠加，从而求得每个源项所对应的特解，而它们的线性组合即为(8.3.7)式的特解，鉴于上述讨论，我们总可以将要解的非齐次波动方程写成如下的形式(省去常数因子)：

$$\nabla^2\rho_s + K^2\rho_s = \rho_{11}\rho_{12} \tag{8.3.24}$$

该两个一阶场的传播方向的夹角为 $\vartheta_0(\vartheta_0 \neq 0)$，则

$$\left.\begin{aligned} \rho_{11} &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 t - k_1 x)} \\ \rho_{12} &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_2 t - k_2\cos\vartheta_0 x - k_2 \sin\vartheta_0 y)} \end{aligned}\right\} \tag{8.3.25}$$

令上式的特解为

$$\rho_{S1} = A_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}[(k_1 \pm k_2\cos\vartheta_0)x + k_2\sin\vartheta_0 y - \Omega t]} \tag{8.3.26}$$

式中

$$\Omega = \omega_1 \pm \omega_2 \tag{8.3.27}$$

将(8.3.25)式和(8.3.26)式代入到(8.3.24)式，有

$$A_1 = \frac{1}{K^2 - (k_1 \pm k_2\cos\vartheta_0)^2 - k_2^2\sin\vartheta_0} \tag{8.3.28}$$

式中，$K = k_1 \pm k_2$，为相互作用所产生的组合波(和差频波)的波数。由(8.3.26)式加上齐次方程的通解便构成全部解

$$\rho_s = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}\{A_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}[(k_1 \pm k_2\cos\vartheta_0)x + k_2\sin\vartheta_0 y]} + A_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}K(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)}\} \tag{8.3.29}$$

式中，第二项为齐次解，它是频率为 Ω、波数为 K、传播方向为 ϑ 的平面波，一般来说，它与特解所对应的平面波的传播方向不同，只有在

$$[K\cos\vartheta - (k_1 \pm k_2\cos\vartheta_0)]x + [K\sin\vartheta - k_2\sin\vartheta_0]y = 常数$$

方向上两个波构成同方向的平面行波。另外，如果上式中 x 或者 y 前面的系数为零，则给出所谓多普勒角。上面的讨论是当 $\vartheta_0 \neq 0$ 时的情形，如果 $\vartheta = 0$，解(8.3.26)不成立，但这时的波动方程(8.3.24)成为

$$\nabla^2\rho_s + K^2\rho_s = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}Kx} \tag{8.3.30}$$

利用第 7 章中的变动参数法，容易求出(8.3.30)式的特解：

$$\rho_{s1} = \frac{-1}{2\mathrm{j}K}\left(\frac{1}{4K} - x\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega t - Kx)} \tag{8.3.31}$$

齐次方程的通解可表示为

$$\rho_{s0} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega t - Kx)} \tag{8.3.32}$$

在此以前我们只取齐次解中的一项(一般来说应是两项)，考虑到波数为复数时解要满足无限远处的辐射条件，(8.3.32)式中的常数 A 要由源条件来确定。一个平面波的声源是一个无限大的平面，实际上不可能实现，但当声源的尺寸比波长大得非常多时，可以近似地认为它是平面波源。设在源平面上二阶谐波尚未产生，故有

$$\rho_s|_{x=0} = (\rho_{s0} + \rho_{s1})_{x=0} = 0$$

解得

$$A = \frac{1}{8\mathrm{j}K^2}$$

于是

$$\rho_S = \frac{1}{2\mathrm{j}K} x\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\Omega t - Kx)}$$

故两个同向平面波的声散射声是有积累效应的波，如果两个波的夹角不为零，即使存在声散射声，它也没有积累效应。

8.4 两正交准直束相互作用的一般讨论[7]

由 8.2 节和 8.3 节的结果可知，声散射声的问题存在两个根本对立的结论，为了进一步研究这个问题，我们仍以英加尔德等采用的准直束作为一阶场，但是用阶跃函数来表示它们，并将它们代入韦斯特维尔特方程(8.3.6)求解，目的是要看一看如果有二阶场，其辐射源函数属于什么性质的？

我们讨论的一阶场是类似于(8.2.1)式和(8.2.2)式所表示的两个正交准直束，为了使问题更为一般化，假设两个束的宽度分别为 a 和 b，即假设两个一阶密度场分别为

$$\left.\begin{aligned} \rho_{11} &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 t - k_1 x)}[U(y+b) - U(y-b)] \\ \rho_{12} &= \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_2 t - k_2 y)}[U(x+a) - U(x-a)] \end{aligned}\right\} \tag{8.4.1}$$

其中

$$U(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{8.4.2}$$

是阶跃函数，而它的导数$U'(x)=\delta(x)$为狄拉克函数。

利用(8.3.6)式，只取两个波的相互作用项(即不讨论二阶谐波项)，但由于$\boldsymbol{V}_{11}\cdot\boldsymbol{V}_{12}=0$，于是在(8.3.6)式中取$\boldsymbol{V}_1^2=0$，应用连续性方程，(8.3.6)式可简化为

$$\Box^2\rho_s=\rho_0^{-1}\left\{(2-\beta)\nabla^2(\rho_{11}\rho_{12})-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2(\rho_{11}\rho_{12})}{\partial t^2}\right\} \tag{8.4.3}$$

将(8.4.1)式代入上式，因为

$$\rho_{11}\rho_{12}\sim e^{j(\omega_1\pm\omega_2)t}$$

故(8.4.3)式可改写为

$$\nabla^2\rho_S+K^2\rho_S=\rho_0^{-1}\{(2-\beta)\nabla^2(\rho_{11}\rho_{12})+K^2\rho_{11}\rho_{12}\} \tag{8.4.4}$$

式中，$K=k_1\pm k_2$，“$\pm$”号对应于和差频，β为介质的非线性系数。

为了求解这个问题，将ρ_s展成二维傅里叶积分，即

$$\rho_S=\int_{-\alpha}^{\infty}\int\phi_S(k_x,k_y)e^{-j(k_xx+k_yy)}\,dk_x\,dk_y \tag{8.4.5}$$

将这积分代入(8.4.4)式左端，将(8.4.1)式代入(8.4.4)式的右端，从而得到一个积分方程，对它进行一次逆傅里叶变换，就可以得到$\phi_S(k_x,k_y)$的表示式，再将它代入(8.4.5)式右端便可以得到ρ_S，它可表为

$$\rho_S(x,y)=W(x,y)+f(x,y) \tag{8.4.6}$$

式中

$$\begin{aligned}W(x,y)=\rho_0^{-1}&\left\{(2-\beta)\pm\frac{(\beta-1)K^2}{2k_1k_2}\right\}e^{\mp jk_1x-jk_2y}\\&\times[U(x+a)-U(x-a)][U(y+b)-U(y-b)]\end{aligned} \tag{8.4.7}$$

$$\begin{aligned}f(x,y)=\pm\frac{(\beta-1)K^2}{2\rho_0k_1k_2}&\iint_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\pm2k_1k_2}{K^2-k_x^2-k_y^2}-1\right\}\\&\times\frac{\sin(k_y-k_2)b}{\pi(k_y-k_2)}\frac{\sin(k_x\mp k_1)a}{\pi(k_x\mp k_1)}e^{-jk_xx-jk_yy}\,dk_xdk_y\end{aligned} \tag{8.4.8}$$

其中应用了积分关系式

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(k_y-k_2)b}{\pi(k_y-k_2)}\ \frac{\sin(k_x\mp k_1)a}{\pi(k_x\mp k_1)}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x-\mathrm{j}k_y y}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y$$
$$=[U(x+a)-U(x-a)][U(y+b)-U(y-b)]\mathrm{e}^{\mp\mathrm{j}k_1x-\mathrm{j}k_2y} \tag{8.4.9}$$

从(8.3.23)式容易证明，只要在(8.4.7)式中令方括号中的因子等于 1，则剩下来的式子即为(8.3.23)式所表示的场；另外，容易看出，因子 $[U(x+a)-U(x-a)]$ $[U(y+b)-U(y-b)]$ 表示了两个准直束相交的公共区，故(8.4.7)式表示了韦斯维尔特的平面波解在互相垂直的有限束情况下的声散射声，显然，这部分场在公共区之外为零，我们称它为局部散射场，也有人称其为惯性场。现在来研究 $f(x,y)$ 的性质，如果它是辐射场，即它在公共区之外不为零，则要进一步探讨它的辐射源的性质。

根据广义函数理论可以知道，对于任何逐段光滑的函数 $g(x)$，只在它在 $(-\infty,\infty)$ 内绝对可积，则恒有

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\frac{\sin N(x-x_0)}{\pi(x-x_0)}\mathrm{d}x=g(x_0) \tag{8.4.10}$$

或者说

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sin N(x-x_0)}{\pi(x-x_0)}\rightleftharpoons\delta(x-x_0)$$

式中，符号“$\rightleftharpoons$”为弱收敛。在(8.4.8)式中令束宽 $a,b\to\infty$，应用(8.4.10)式容易得到

$$\lim_{a,b\to\infty}f(x,y)=0$$

这个结果表明，当 $a,b\to\infty$，即公共区的边界或者有限束的边界趋向无限远处时，$f(x,y)$ 逐渐消失。根据莱特希尔理论，声散射声应该是由于公共区内按体积分布的四极子辐射源在场点所产生场的叠加效应。当 a，b 增大时，四极子源的数目增大，于是在公共区内总可以找到一些场点，其 $f(x,y)$ 不等于零。但上述结果表明，只要 a，$b\to\infty$，公共区内任一有限远处的场点 $f(x,y)$ 恒等于零，这一事实的唯一解释是：产生这个辐射场的源不是按体积分布的，而是分布在公共区的边界上(即分布在波束边界上)。

另外，将(8.4.1)式代入波动方程，容易得到

$$\left.\begin{aligned}\Box^2\rho_{11}&=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 t-k_1 x)}\frac{\partial}{\partial y}[\delta(y+b)-\delta(y-b)]\\ \Box^2\rho_{12}&=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_2 t-k_2 y)}\frac{\partial}{\partial x}[\delta(x+a)-\delta(x-a)]\end{aligned}\right\}\tag{8.4.11}$$

即一阶场准直束不满足齐次波动方程，它们在自己的束边界上存在着面源，因此，$f(x,y)$ 是这些面源的贡献。正如前面指出过，莱特希尔方程的应用条件是，一阶场满足齐次波动方程，(8.4.11)式表明，准直束不满足这个条件，它们在边界 $\pm a$ 和 $\pm b$ 上有面辐射源，于是可以断言，理论上出现 $f(x,y)\neq 0$ 这部分辐射场，实际上是由于选用了不符合条件的一阶场所造成的。

8.5　一列平面波与一列行波脉冲的声散射声[8~10]

根据前面的结果可知，如果两个一阶场满足齐次波动方程，它们就不会产生声散射声的现象，基于这一概念特里维特(Trivett) 和罗杰斯(Rogers)[8]设计了一列平面波和一列有限宽度的行波脉冲的相互作用，通过计算机模拟，得到了声散射声，由于这两个一阶场都满足齐次波动方程，这就使得他们有理由反对前面的结论。

为了弄清上面提出的现象，我们来分析这个问题[9, 10]，为简单起见，假设这两个二阶场的传播方向互相垂直。在(8.1.6)式的莱特希尔方程中进行一次傅里叶变换，即

$$\rho=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\rho}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\tag{8.5.1}$$

于是有

$$\nabla^2\overline{\rho}+\frac{\omega^2}{C^2}\overline{\rho}=-\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\overline{T}_{ij}}{\partial x_i\partial x_j}\tag{8.5.2}$$

式中，$\overline{\rho}$ 及 $\overline{T}_{ij}$ 分别为 ρ 和 T_{ij} 的傅里叶变换。利用(8.4.3)式，令

$$\rho_0 C^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}=B$$

于是(8.5.2)式可以写成

$$\nabla^2\overline{\rho}+\frac{\omega^2}{C^2}\overline{\rho}=\rho_0^{-1}\left\{(1-B)\nabla^2(\overline{\rho_{11}\rho_{12}})+\frac{\omega^2}{C^2}(\overline{\rho_{11}\rho_{12}})\right\} \tag{8.5.3}$$

式中，C 为声速，ρ_{11} 和 ρ_{12} 为两个一阶场，上面的一横代表该宗量的傅里叶变换。如果两个一阶场是平面波和平面波行脉冲，它们的表达式为

$$\left.\begin{aligned}\rho_{11}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1 t-k_1 x)}\left[U\left(t-\frac{x}{C}+\tau\right)-U\left(t-\frac{x}{C}-\tau\right)\right]\\ \rho_{12}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_2 t-k_2 y)}\end{aligned}\right\} \tag{8.5.4}$$

将(8.5.4)式代入(8.5.3)式，容易得到

$$\nabla^2\overline{\rho}+\frac{\omega^2}{C^2}\overline{\rho}=-\frac{2\pi}{\rho_0}\delta_\tau\left[\omega-(\omega_1\pm\omega_2)\right]\left\{(1-B)\left[\left(\frac{\omega}{C}\mp k_2\right)^2+k_2^2\right]+\frac{\omega^2}{C^2}\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left[\frac{\omega}{C}x\mp k_2(x-y)\right]} \tag{8.5.5}$$

式中

$$\delta_\tau(x)=\frac{\sin\tau x}{\pi x} \tag{8.5.6}$$

将 $\overline{\rho}$ 展成二维傅里叶积分，即

$$\overline{\rho}=\frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\phi_s(k_x,k_y)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x-\mathrm{j}k_y y}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{8.5.7}$$

将(8.5.7)式代入(8.5.5)式，再将所得的式子进行一次逆傅里叶(二维)变换，解出 $\phi_s(K,k)$：

$$\begin{aligned}\phi_s(k_x,k_y)=&\frac{1}{\dfrac{\omega^2}{C^2}-k_x^2-k_y^2}\frac{2\pi}{\rho_0}\delta_\tau\left[\omega-(\omega_1\pm\omega_2)\right]\\&\times\delta\left(k_x-\frac{\omega}{C}\pm k_2\right)\delta(k_y-k_2)\left\{-(1-B)\left[\left(\frac{\omega}{C}\mp k_2\right)^2+k_2^2\right]+\frac{\omega^2}{C^2}\right\}\end{aligned}$$

将它代入(8.5.7)式，可得

$$\bar{\rho}=\frac{1}{-\left(\frac{\omega}{C}\mp k_2\right)^2-k_2^2+\frac{\omega^2}{C^2}}\frac{2\pi}{\rho_0}\delta_\tau(\omega-\omega_1\mp\omega_2)$$
$$\times\left\{-(1-B)\left[\left(\frac{\omega}{C}\mp k_2\right)^2+k_2^2\right]+\frac{\omega^2}{C^2}\right\}e^{-j\left(\frac{\omega}{C}\mp k_2\right)x\mp k_2 y}$$

将这个式子代入到(8.5.1)式，可得

$$\rho=\rho_0^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{-\left(\frac{\omega}{C}\mp k_2\right)^2-k_2^2+\frac{\omega^2}{C^2}}\delta_\tau[\omega-(\omega_1\pm\omega_2)]$$
$$\times\left\{-(1-B)\left[\left(\frac{\omega}{C}\mp k_2\right)^2+k_2^2\right]+\frac{\omega^2}{C^2}\right\}e^{j\omega t-j\left(\frac{\omega}{C}\mp k_2\right)x\mp jk_2 y}d\omega \tag{8.5.8}$$

考虑到介质总是有一点吸收的，故计算(8.5.8)式时可以利用复变函数积分法来求解，将 $\delta_\tau(x)$ 用(8.5.6)式代替，并且令 $\omega\mp\omega_2\to\omega$，于是有

$$\rho=W_1(x,y,t;\tau)-W_1(x,y,t;-\tau) \tag{8.5.9}$$

式中

$$W_1(x,y,t;\tau)=\frac{1}{2\pi j\rho_0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega\left(t+\tau-\frac{x}{C}\right)-j\omega_1\tau\pm j\omega_2 t\mp jk_2 y}\frac{F(\omega)}{\omega-\omega_1}d\omega \tag{8.5.10}$$

以及

$$F(\omega)=(1-B)\pm\frac{(\omega\pm\omega_2)^2}{2\omega\omega_2} \tag{8.5.11}$$

显然，W_1 的被积函数在复平面上有两个极点 $\omega=0$，ω_1。

第一种情况：$t-\frac{x}{C}+\tau>0$，且 $t-\frac{x}{C}-\tau>0$，则 $W_1(x,y,t;\tau)$ 及 $W_1(x,y,t;-\tau)$ 的积分路线都取在 ω 的上半平面，这样，不难求出积分，即

$$\rho=\pm\frac{\omega_2 B}{2\rho_0}j\frac{\sin\omega_1\tau}{\omega_1}e^{\pm j(\omega_2 t-k_2 y)} \tag{8.5.12}$$

显然，(8.5.12)式中没有 $\omega_1 \pm \omega_2$ 频率成分的波。而 $t-\dfrac{x}{C}\pm\tau>0$，表示信号脉冲已经通过了 x 点，因此其中的 ρ 应该是反向散射，故在这种情况下，反向散射中没有声散射声。

第二种情况：$t-\dfrac{x}{C}+\tau<0$，$t-\dfrac{x}{C}-\tau<0$，这相当于脉冲的前沿刚刚到达 x 点。这时在 ω 平面上将积分路线都取在上半面，容易算出

$$\rho=\mp\frac{\omega_2 B}{2\rho_0}\mathrm{j}\frac{\sin\omega_1\tau}{\omega_1}\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}(\omega_2 t-k_2 y)} \tag{8.5.13}$$

显然，式中也没有相互作用波，或者说，正向散射波中没有声散射声。

第三种情况：$t-\dfrac{x}{C}+\tau<0$，$t-\dfrac{x}{C}-\tau<0$，这相应于一阶场行波脉冲的后沿已通过 x 点，而前沿还没有到达 x 点，这显然违背因果规律，即是不可能发生的事情，尽管可以算出下述结果，即

$$\begin{aligned}\rho=\frac{1}{2\rho_0}\Bigg\{&\mp\frac{\omega_2 B}{\omega_1}\cos\omega_1\tau\bullet\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_2 t\mp\mathrm{j}k_2 y}\\&+2\left[(1-B)\pm\frac{B(\omega_1\pm\omega_2)^2}{2\omega_1\omega_2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1\pm\omega_2)t-\mathrm{j}(k_1 x\pm k_2 y)}\Bigg\}\end{aligned} \tag{8.5.14}$$

第四种情况：$t-\dfrac{x}{C}+\tau>0$，$t-\dfrac{x}{C}-\tau<0$，这相应于行波脉冲正通过 x 点，或者说 x 点是处于两个一阶场的公共区之内。在这种情况下，(8.5.9)式中的两个积分路线一个取在 ω 的上半平面，一个取在下半平面，最终可得

$$\begin{aligned}\rho=-\frac{1}{2\rho_0}\Bigg\{&\mp\frac{\omega_2 B}{\omega_1}\cos\omega_1\tau\bullet\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}(\omega_2 t-k_2 y)}\\&+2\left[(1-B)\pm\frac{B(\omega_1\pm\omega_2)^2}{2\omega_1\omega_2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_1\pm\omega_2)t-\mathrm{j}(k_1 x\pm k_2 y)}\Bigg\}\end{aligned} \tag{8.5.15}$$

根据 8.4 节的定义可知，(8.5.15)式是局部散射场或者惯性场。

上述四种情况表明，一个平面波与一个平面行波脉冲传播方向互相垂直时，其相互作用的结果只是在公共区之内产生特解组合波，如果行波脉冲宽度无限增加，(8.5.15)式中的特解组合波将遍及整个空间，再加上齐次波动方程的通解，注意到 $\vartheta_0=\pi/2$，这时(8.5.15)式加上通解的全部解与(8.3.29)式完全一致。另外，这个结果也表明，在公共区之外，由于波动方程的齐次通解存在，还存在非积累效

应的场。

8.6　声束的相互作用[6]

我们已经讨论了平面波的声散射声，而实际上任何一个换能器辐射声波都具有一定的指向性，如一个具有无限障板的圆形活塞换能器的远场可表示为

$$f_1(r,\vartheta,\varphi,t)=D(\vartheta)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}}{r} \tag{8.6.1}$$

式中，r 为由换能器中心到场点的距离，ϑ 为极角，它从称能器的对换轴量起，$D(\vartheta)$ 为换能器的指向性函数。由这式子可知，无限障板上的圆形活塞换能器的远场辐射是有指向性的球面波，或者称之为球面波束。有时换能器的近场贡献不能忽略，特别是当它的瑞利距离较大时更是如此，所谓换能器的瑞利距离定义为辐射面积除以声波波长，它是衡量近场贡献的主要参数。因此，一个换能器的辐射场表达式必须既描述远场又描述近场，它可以根据辐射理论给出其积分表达式，一般说来总可以表示成 $f(x,y,z,t)$，如果它满足绝对可积条件，就能够将它展成傅里叶积分

$$f(x,y,z,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty}F(k_x,k_y,k_z,t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}(k_x x+k_y y+k_z z)}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z \tag{8.6.2}$$

$F(k_x,k_y,k_z,t)$ 可以通过逆变换求出。(8.6.2)式的物理意义是将任一满足展开条件的辐射场用无限个不同方向和不同波数的广义微分平面波的叠加来表示。两个波束的相互作用可以看成它们各自的微分平面波相互作用的叠加，再根据前面关于平面波相互作用理论，从原则上说，可以得到波束相互作用的形式解，但容易看出，得到的将是一个九重积分。一般说来，要借助于近似方法(如多重积分的越过法)才能得到解析解。以上讨论的只就 $f(x,y,z,t)$ 可以用解析式给出的情况而论的，通常一个活塞换能器的辐射场本身的表达式就是一个二重积分或者面积分，只有在远场才可以用(8.6.1)式来表示，因而一个普适性的解式的积分重数将更高。

(8.6.2)式是用微分平面波的三重积分来表示的，对于单频简谐波而言，波束可以用微分平面波的二重积分来表示，因为

$$f(x,y,z,t)=f_1(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

将 $f_1(x,y,z)$ 展成

$$f_1(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int F_1(k_x,k_y)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left[k_x x+k_y y\pm\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}z\right]}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y \tag{8.6.3}$$

上面展开式有一个特点，它的每个微分平面波都是三维波，并且它们各自的 3 个波数的平方和都等于 k^2，这表明这种展开式中的所有微分平面波传播向量的长度都相等，不同的是它们有各自的传播方向。式中正负号是保证积分不会发散。很容易证明，这样展开的 $f(x,y,z,t)$ 满足齐次波动方程。若 $f_1(x,y,z)$ 为球面波，即

$$f_1(x,y,z)=\frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr} \tag{8.6.4}$$

则 F_1 为

$$F_1(k_x,k_y)=\frac{j}{2\pi\sqrt{k^2-k_x^2-k_y^2}} \tag{8.6.5}$$

而在(8.6.3)中 $z>0$ 时取正号，$z<0$ 取负号，而且

$$r^2=x^2+y^2+z^2 \tag{8.6.6}$$

对于二维波束，(8.6.3)式成为

$$f_1(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(k_x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(k_x x\pm\sqrt{k^2-k_x^2}\,y\right)}\mathrm{d}k_x \tag{8.6.7}$$

正如上面指出的，将波束展开成平面波的方法用于声相互作用时，数学上较为困难，特别是换能器辐射场只能用积分表达式描述时更是如此，下面只就换能器的瑞利距离很小以至于其近场贡献可以忽略不计的情况进行讨论。

如果有两个靠得很近的活塞换能器或者只有一个活塞换能器但通过波束旋转，使得两个波束的对称轴成一个角度 ϑ_0，于是它们产生的源项可表示为

$$\rho_{11}\rho_{12}=D(\vartheta)D(\vartheta-\vartheta_0)\frac{1}{r^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(k_1\pm k_2)r} \tag{8.6.8}$$

对于简谐波，(8.6.3)式中的 $F_1(k_x,k_y)$ 如(8.6.5)式所示，将它们代入到(8.6.3)式，且令

$$k_x=k\sin\vartheta\cos\varphi,\quad k_y=k\sin\vartheta\sin\varphi$$

则

$$k_z=k\cos\vartheta$$

当$k^2-k_x^2-k_y^2 \geqslant 0$时，上述变换的$\vartheta$为实数，这部分对应的波称为传播波；如果$k^2-k_x^2-k_y^2<0$，则$\vartheta$为虚数，这部分波称为非均匀波。将这个变换关系及(8.6.4)式、(8.6.5)式代入(8.6.3)式，可得

$$\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}=-\frac{\mathrm{j}k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\sin\vartheta\cos\varphi+y\sin\vartheta\sin\varphi\pm z\cos\vartheta)}\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi+\text{非均匀波} \tag{8.6.9}$$

式中，传播波表示了无限多个微分平面波，其波数都是k，但其传播方向为(ϑ,φ)，并限制在不同的微分角度$\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$内。如果将上述积分表示成二重求和的极限，则有

$$\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}hr}=-\frac{\mathrm{j}k}{2\pi}\left\{\sum_n\sum_m\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(x\sin\vartheta_n\cos\varphi_m+y\sin\vartheta_n\sin\varphi_m\pm z\cos\vartheta_n)}\times\sin\vartheta_n\Delta\vartheta_n\Delta\varphi_m\right\}_{\Delta\vartheta_n,\Delta\varphi_m\to 0}+\text{非均匀波} \tag{8.6.10}$$

利用这些关系，源函数可写为

$$\rho_{11}\rho_{12}=\frac{k_1k_2}{4\pi^2}D(\vartheta)D(\vartheta-\vartheta_0)(G_1+G_2+G_3) \tag{8.6.11}$$

式中G_1为同方向传播的微分平面波相互作用项，即

$$G_1=\sum_m\sum_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}K(x\sin\vartheta_n\cos\varphi_m+y\sin\vartheta_n\sin\varphi_m\pm z\cos\vartheta_n)}\sin^2\vartheta_n(\Delta\vartheta_n\Delta\varphi_m) \tag{8.6.12}$$

G_2是不同方向传播的平面波相互作用项，即

$$G_2=\sum_{m\neq l}\sum\sum_{n\neq i}\sum\mathrm{e}^{-\mathrm{j}[x(k_1\sin\vartheta_n\cos\varphi_m\pm k_2\sin\vartheta_i\cos\varphi_l)+(k_1\sin\vartheta_n\sin\varphi_m\pm k_2\sin\vartheta_i\sin\varphi_l)]}\times\mathrm{e}^{-\mathrm{j}[k_1\cos\vartheta_n\pm k_2\cos\vartheta_i(\oplus z)]}\sin\vartheta_n\sin\vartheta_i\Delta\vartheta_n\Delta\vartheta_i\Delta\varphi_m\Delta\varphi_l \tag{8.6.13}$$

而

$$G_3=\text{非均波的贡献}$$

式中，省去了$\Delta\vartheta_n,\Delta\varphi_m\cdots\to 0$的表示，符号$\pm$表示和差频，即$K=k_1\pm k_2$，和频取正号，差频取负号，而$z$前面的$\pm$号，表示以$\oplus$，是当$k_z$成为虚数时要保证积分收敛。根据前面的结果可知，由于G_1是同方向传播的微分平面波的相互作用，G_2是方向不同的微分平面波的相互作用，前者有积累效应，后者没有，G_3是非均匀波

的贡献，它在远场影响很小，故G_1对组合波的贡献是主要的，下面只对它的作用进行评估。

将(8.6.12)式代入到(8.6.11)式，只取其中的G_1部分代入到非齐次波动方程，其特解如下：

$$\rho_{S1}=\iiint D(\vartheta)D(\vartheta-\vartheta_0)G_1(r,\vartheta,\varphi)\frac{1}{R_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}KR_1}\mathrm{d}\tau \tag{8.6.14}$$

上式对源体积积分，K为和差频波数，R_1为从源点到场点的距离，显然，这个积分是不易积出来的，下面只就ρ_{S1}的远场进行讨论。展开R_1

$$R_1\approx r_1-[\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1)+\cos\vartheta\cos\vartheta_1]r \tag{8.6.15}$$

式中，r_1为由换能器的中心到场点的距离，ϑ_1和φ_1为与它相对应的角坐标，r，ϑ和φ为分布源的球坐标。将这个近似式代入到(8.6.14)式，得到

$$\rho_{s1}\approx\frac{1}{r_1}G(\vartheta_0,\vartheta_1,\varphi_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}Kr_1} \tag{8.6.16}$$

$$\begin{aligned}G(\vartheta,\vartheta_1,\varphi_1)\approx\sum_m\sum_n\iiint &D(\vartheta)D(\vartheta-\vartheta_0)\exp\{-\mathrm{j}Kr\\&\times[\sin\vartheta\sin\vartheta_n\cos(\varphi-\varphi_m)+\cos\vartheta\cos\vartheta_n\\&+\sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1)+\cos\vartheta\cos\vartheta_1]\}\\&\times\sin^2\vartheta_n\Delta\vartheta_n^2\Delta\varphi_m^2r^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{8.6.17}$$

由此可见，散射组合波ρ_{S1}是指向球面波，其指向性函数不仅依赖于球坐标角ϑ_1和φ_1，还与两个波束的交角ϑ_0，因而与原波的指向性函数$D(\vartheta)D(\vartheta-\vartheta_0)$紧密相关，如果两个波束指向性函数没有重合区，则$\rho_{S1}=0$，这就可以理解两个正交波束的声散射声很小这一事实。

8.7 声散射声的实验[11]

为了验证声散射声的理论，很多学者进行了实验研究，由于声散射声的信噪比较低，实验上有一定的困难，因而不是所有的实验都是成功的，为节省篇幅起

见，本节只介绍琼斯(Jones)和拜尔(Beyer)的实验。

两个X切割的石英圆片换能器，其共振频率分别为7MHz和5MHz，其半径都是0.9525cm，将它们固定使其主轴互相垂直，并产生宽度为15μs的声脉冲，两声束在空间相交产生一个公共区，两个声源换能器到公共区的距离都是21.89cm，为保证两个脉冲同时到达公共区，采用了标准的脉冲回声技术。整个实验的原理如图8.2所示。通常的实验中，由于接收换能器对公共区的张角太大，角度平滑效应有可能测不出如(8.2.4)式所表示的多普勒角方向上所达到的极大声压，为此，在这个实验中，将接收换能器放置在离公共区足够远的地方，使它对公共区的半张角为14′，而对应于多普勒角的极大方向与其相邻的第一零点之间的角度约为0.5°。该设备在12MHz的检测能力可达0.007N / m²，这时的信噪比仍有10dB，在实验改变接收距离范围为7~74cm，两个发射距离从3cm变化到30cm。测量结果没有观察到声散射声。

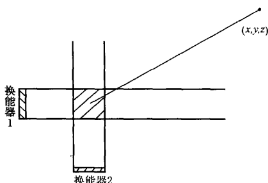


图8.2　声散射声实验原理图

结　束　语

声散射声是指介质中有两个一阶声场(或称为两个原波)相互作用所产生的组合声波(本节主要指和差频波)，这个问题首先是由英加尔德等在1956年提出的。他们根据著名的莱特希尔积分，采用的一阶场是两个准直束，其理论结果表明，在两个多普勒角方向上声散射声达到极大值，他们实验(尽管比其理论值小)观察到声散射声。正如上面几节所看到的，上述处理在理论上是有缺陷的，因为准直束不满足齐次波动方程，因而不满足莱特希尔方程的条件，更不满足莱特希尔远场积分的近似条件，所以韦斯特维尔特认为英加尔德等的理论结果是由于准直束不连续边界所产生的，并认为英加尔德等的实验结果是换能器产生的伪声。本书作

者的工作证明，准直束的不连续边界是产生声散射声的面源，进一步证明，如果两个正交一阶场满足齐次波动方程(如正交的平面波与平面行波脉冲的相互作用)，则不产生特解性的声散射声。

韦斯特维尔特在研究两个平面波的相互作用时，是通过非齐次波动方程的源函数性质来评估的。他认为，如果源函数可以写成达朗贝尔算符与另一个可微函数作用时，他将这种源函数称为达朗贝尔源，它不产生声散射声，否则，源函数称为非达朗贝尔源。后一种源才可能产生声散射声。他所以持这种观点是认为，达朗贝尔源只产生局部场，属于非辐射的，只有非达朗贝尔源才可能产生辐射场，韦斯特维尔特将这种辐射场称为声散射声，后一情形只有当两个平面波传播方向相同时才出现。

我们认为，两个平面波传播方向相同时，在非频散介质中，满足源条件的解是积累性的场，这是因为，激励波(两个原波)以及组合波以相同的波速和方向向前传播，使得组合波在其传播过程中不断得到激励波源的补充和积累。另外，当两个平面波方向不同时，波动方程的一般解是(8.3.29)式，它的右端花括号中的第一项即为韦斯特维尔特所说的局部场，第二项是齐次波动方程的解，关于它的贡献韦斯特维尔特没有讨论。一般说来，(8.3.29)式的右端不恒为零，但它也不存在积累效应。由此可见，韦斯特维尔特所说的声散射声的有无是基于有无积累效应的场的，一般说来，在声场中有积累效应的场总是占主导地位的。

一个有限声束总可以展成以平面波为被积函数的傅里叶积分，特别是可以展成波数相同但传播方向不同的微分平面波的叠加，两个波束的相互作用，可以看成这些微分平面波的两两相互作用，它又可分成方向相同的两两微分平面波的相互作用，以及方向不同的两两相互作用，由于前者是有积累效应的，故它们是占优势的成分。对于两个无限障板圆形活塞原波束的相互作用，它的组合波的远场是指向性的球面波，不具有积累效应。

参考文献

[1] Lighthill M J. On sound generated aerodynamically. Proc Roy Soc (London), 1952, A211: 564~587

[2] Goldstein M E. Aeroacoustics. New York: McGraw-Hill International Book Company, 1976

[3] Ingard U, Pridmore-Brown D C. Scattering of sound by sound. Jour Acoust Soc Am, 1956, 28: 367~369

[4] Westervelt P J. Scattering of sound by sound. Jour Acoust Soc Am, 1957, 29: 199~203

[5] Westervelt P J. Scattering of sound by sound. Jour Acoust Soc Am, 1957, 29: 934~935

[6] Qian Z W. Frontiers of nonlinear acoustics. *In*: Hamilton M F, Blackstock D T. Proc 12th ISNA. New York: Elsevier Science Publishers Ltd, 1990. 283

[7] 钱祖文. 关于声散射声. 物理学报, 1976, 25：472~480

[8] Trivett P H, Rogers P H. Scattering of a CW plane wave by a pulse. Jour Acoust Soc Am, 1982, 71: 1114~1117

[9] 钱祖文. 平面波与平面行波脉冲的声相互作用. 物理学报, 1988, 37：221~228

[10] Qian Z W. Interaction between a cw plane wave and a travelling plane pulse. Chinese Physics, 1989, 9：629~637

[11] Jones J P, Beyer R T. Scattering of sound by sound. Jour Acoust Soc Am, 1970, 48: 398~402

第9章　声参量发射阵

从第8章的结果可知，两个一阶声场相互作用，如果介质是非频散的，只有当它们的传播方向相同时，在它们的公共区之外才有积累效应的声散射声。因为这时的两个一阶场在其公共区的任意两点有固定的相位差，故形成相干的四极子辐射声源。为了简明起见，我们来看一下两个无限延伸的平面波一阶场的声散射声的产生和传播过程。在垂直于一阶场传播方向的平面上，它们产生的声散射声具有相同的相位，由于没有频散效应，各种频率成分的声波以相同的波速传播，因为两个一阶场在传播过程中不断产生声散射声，其正向散射部分(指与一阶场传播方向相同的那部分散射声)同相地叠加到前些时刻生成的散射声上，基于这样的情况，韦斯特维尔特提出了声参量发射阵的理论。

众所周知，如果电子元件具有非线性性质(即它们工作在非线性区)，在有两个频率信号通过它们时，就会产生二阶谐波、和差频波等新的频率成分，如果元件不存在非线性性质，这些新成分也就无从产生。通常将这种通过介质参数而间接激励起来的信号称为参量激励信号。由第 8 章的理论可知，只有介质存在非线性参数时，才可能产生声散射声，这也许是人们将这种发射器称为声参量发射阵的理由。

设有两束声传播方向相同，第一束声的角频率为 ω_1，第二束声的角频率为 ω_2，在参量阵理论中将这两束声称为原波(primary wave)，它们的频率称为原频率(primary frequency)。为简单起见，设两个波束完全重合，当它们在介质中传播时，两个原波产生相互作用，从而出现新的辐射源，如果只考虑二阶相互作用，介质中将参量激励起 $2\omega_1, 2\omega_2, |\omega_1-\omega_2|$ 和 $\omega_1+\omega_2$ 四种频率成分的波(这里不考虑分频波)，而后两个频率成分称差频波与和频波，它们是参量阵中要讨论的主要成分。

如果不计及原波传播速度的有限振幅效应，即认为它以小振幅波的声速传播，正如前面说过，由于不考虑频散，于是差频波沿声轴方向将以相同的速度与原波一起向前传播，并与原波在行进过程中不断产生的差频波叠加。可以预料，在声轴方向上差频波将达到较大的值，而在非轴方向上，由于非同相叠加，故很小，这就会形成很好的指向性。

9.1　韦斯特维尔特线源参量阵理论[1~15]

通常的参量阵是用一个特制的发射换能器向介质中发射两个原频波，由于介

质的非线性，通过相互作用，产生了新的频率成分(和差频波)的辐射源，这些辐射源向空间辐射声波，由于介质的吸收，在传播过程中原波振幅不断减小而最终消失，在原波消失过程中，新的辐射源不断产生，但源的强度是随距离作指数衰减，这种性质与天线理论中的指数束控阵极其类似，其辐射最大方向是阵长方向，故在 20 世纪 60 年代初期将它称为指数束控端射阵(taper endfire array)。下面可以看出，这种阵的长度近似地用 α_T^{-1} 来表示，这里 $\alpha_T \approx \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha$ 分别为两个原频波以及差频波(或者和频波)的吸收系数。

下面还将看出，韦斯特维尔特提出的参量阵是一个线源参量阵，他认为源是分布在一条直线上的，在理论推导过程中，假设介质是理想流体，介质对声波的衰减只是在求解波动方程时以“想当然”的方式引入相应的衰减因子。此外，在处理过程中，没有考虑有限振幅效应，即在讨论介质中的衰减时认为只是小振幅吸收，并且认为不管原频波还是差频波都以小振幅波速传播。而且整个理论实际上只取到二级近似。

根据莱特希尔方程(8.1.6)，可知

$$\nabla^2 \rho - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial xj}$$

忽略黏滞应力，得到

$$T_{ij} = \rho V_i V_j + (P - \rho C_0^2)\delta_{ij}$$

将 T_{ij} 代入上式，并且改成用 P 表示的波动方程，即

$$\nabla^2 P - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho C_0^2 - P) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\rho V_i V_i) \tag{9.1.1}$$

与(8.3.6)式的计算过程相同，对于流体做无旋运动，$\nabla \times \boldsymbol{V} = 0$，准确到二级近似有

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\rho V_i V_j) = \rho_0\left[(\nabla \cdot \boldsymbol{V})^2 + \boldsymbol{V} \cdot \nabla^2 \boldsymbol{V} + \nabla\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{V}^2\right)\right]$$

应用一阶场满足的方程式，上式可化为

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\rho_0 V_i V_j) = \rho_0^{-1} C_0^{-2}\left\{-\Box^2\left(\frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{2}\rho_0^2 C_0^{-2}\boldsymbol{V}^2\right) + \nabla^2(\rho_0^2 C_0^{-2}\boldsymbol{V}^2)\right\} \tag{9.1.2}$$

此外，展开下式到二级近似

$$\begin{aligned}\rho - C_0^{-2}P &\approx \rho - C_0^{-2}\left[P_0 + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{\rho=\rho_0}(\rho-\rho_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}(\rho-\rho_0)^2\right] \\ &= -\frac{1}{2}C_0^{-2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}(\rho-\rho_0)^2 C_0^{-2} = \frac{1}{2}C_0^{-6}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0} p^2\end{aligned} \tag{9.1.3}$$

式中

$$P = P_0 + p + p_s$$

将这些关系代入(9.1.1)式，注意到(9.1.2)式右端花括号中的第一项并不构成源函数，因为被达朗贝尔算符$\Box^2$运算的量相应于齐次波动方程的一个解，不是有源解，故将它舍弃或者合并到齐次解中去，由此得到和差频声压p_s应当满足

$$\Box^2 p_s = -\frac{1}{2}C_0^{-6}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}\frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} - \rho_0 \nabla^2 \boldsymbol{V}_1^2$$

式中，p, $\boldsymbol{V}_1$分别为一阶压力(声压)和一阶质点速度矢量。为了消去$\boldsymbol{V}_1$，假设$\boldsymbol{V}_1$和p满足平面波阻抗关系，即

$$\boldsymbol{V}_1^2 = \frac{p^2}{\rho_0^2 C_0^2} \tag{9.1.4}$$

代入波动方程可得

$$\Box^2 p_s = -\rho_0 \frac{\partial q}{\partial t} \tag{9.1.5}$$

式中

$$q = \rho_0^{-2}C_0^{-4}\left[1 + \frac{1}{2}\rho_0 C_0^{-2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}\right]\frac{\partial p^2}{\partial t} \tag{9.1.6}$$

q称为参量阵的源强。推导过程舍弃了项$\Box^2 p^2$，因为由(9.1.5)式可以看出，这一项可以包含在波动方程的齐次解中。而在无边界的情况下，(9.1.5)式只有基尔霍夫推迟解这一项，即

$$p_s = -\frac{\rho_0}{4\pi}\iiint \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial t}[q]\mathrm{d}\tau \tag{9.1.7}$$

式中，$[q] = q\left(t - \dfrac{r}{C}\right)$为$q$的推迟量。对于原频率为$\omega_1$和$\omega_2$的两个正弦波来说，其

声压为

$$p = p_0 e^{-\alpha_0 x}\left\{\cos\left(\omega_1 t - k_1 x\right) + \cos(\omega_2 t - k_2 x)\right\}$$

其中假设两个原波的频率很靠近，故它们的吸收系数都近似写为 α_0，否则要分别写出其吸收项。韦斯特维尔特讨论的波束是截面积为 S_0，于是有 $\mathrm{d}\tau = S_0\mathrm{d}x$，因为只考虑和差频波，$p^2 \to p_1 p_2$，将这些关系式代入(9.1.6)式和(9.1.7)式，根据图 9.1，在相当于辐射问题中的夫琅禾费近似下，即取近似 $R_0 > \dfrac{k_s}{\alpha_0^2}$，积分(9.1.7)可写为

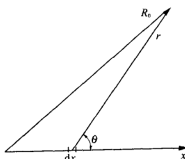


图 9.1　线源参量阵

$$p_s = \frac{\omega_s^2 \rho_0 A s_0 e^{\mathrm{j}k_s R_0 - \mathrm{j}\omega_s t}}{4\pi R_0}\int_0^l e^{\mathrm{j}(k_s + 2\mathrm{j}\alpha_0 - k_s\cos\vartheta)x}\mathrm{d}x \tag{9.1.8}$$

式中，ω_s 为 $\omega_1 \pm \omega_2, k_s = \dfrac{\omega_s}{C_0}$，而

$$A = \rho_0^{-2} C_0^{-4}\left[1 + \frac{1}{2}\rho_0 C_0^{-2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}\right] p_0^2 = \frac{\beta p_0^2}{\rho_0^2 C_0^4}$$

l 是源强 q 衰减到可以忽略时的距离，如果

$$l \gg \frac{1}{2\alpha_0}$$

则

$$p_s = \frac{\rho_0 \omega_s^2 A s_0}{8\pi R_0}\frac{1}{\alpha_0 - \mathrm{j}k_s \sin^2\left(\dfrac{\vartheta}{2}\right)} e^{\mathrm{j}k_s R_0 - \mathrm{j}\omega_s t} \tag{9.1.9}$$

或者用声强表示, 有

$$I_s = \frac{\omega_s^4 p_0^4 S_0^2 \beta^2}{2(8\pi)^2 \rho_0^3 C_0^9 R_0^2} \frac{1}{\alpha_0^2 + k_s^2 \sin^4\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} \tag{9.1.10}$$

式中, β为介质的非线性系数, 通常定义

$$l_0 = \frac{1}{2\alpha_0} \tag{9.1.11}$$

为参量阵的阵长。若

$$\vartheta = \vartheta_d = 2\sqrt{\frac{\alpha_0}{k_s}} \tag{9.1.12}$$

则在此方向上的I_s比主轴方向小 3dB, 故ϑ_d称为参量阵指向性图的半束宽。

现在研究声参量阵的性质。由于和频波受到的吸收大, 故超过一定的距离后只有差频波存在, 今后除了作特殊声明以外, 所说到参量发射阵只指差频波。

首先可以看出, 参量阵辐射场是一种指向性很强的球面波束, 其束宽很窄。例如, 对于平均原波频率为 100kHz 的原波, 如果使之在水中产生差频为 10kHz 的参量波, 则其ϑ_d只有 1.1° 左右, 由此可见, 它是一种低频超指向性的声源。

其次, 根据理论公式(9.1.10)式可知, 参量阵指向性图没有旁瓣。

另外一个特点它是一个宽带声源, 如当原波的频率只变化 10%, 则差频波就可能变化若干个倍频程, 因此它有很大的信息容量, 有可能获得很高的信号处理增益。

它的缺点是效率低, 这个问题也可以这样来认识, 即参量声源之所以能有上述优点, 正是以损失能源为代价的, 也许这些优点在其他场合即使花很大代价也换取不到。

在韦斯特维尔特提出参量阵的理论之后不久, 贝林(Bellin)和拜尔从实验上很快证实了它的存在[5]。他们用一个直径为 1in(1in=2.54cm)的石英晶体, 其共振频率为 13.5MHz, 发射两个原频波的频率分别为 13MHz 和 14MHz, 用一个很小的柱形钛酸钡接收换能器($\frac{1}{16}$ in 外径, $\frac{1}{16}$ in 长)接收, 在水中测量了差频声压及其指向性, 并定性地证实了参量阵理论的正确性。其实验结果与理论比较见图 9.2 和图 9.3 中, 9.2 中的实线是理论值, 虚线是实验值, 图 9. 3 中的黑点是实验值, 直线是理论值。由实验结果可见, 指向性的实验值比理论值尖锐。但从实验设备的情况容易看出, 测量点是在发射换能器的瑞利距离之内, 即在原波近场之内, 而理论应在

差频的远场才正确。

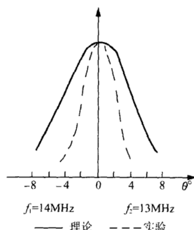


图 9.2 水中参量阵指向性的理论与实验比较

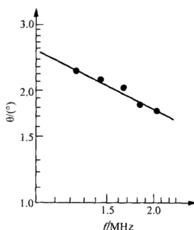


图 9.3 水中参量阵的半压力角与差频频率的关系

黑点是实验值，直线是理论斜率

9.2 线源参量阵的一般讨论[13, 14]

9.1 节在求得(9.1.9)式时，应用了 $l \gg \dfrac{1}{2\alpha_0}$，即到场点的距离比参量阵的阵长大很多时(9.1.9)式才成立。对于水来说，在频率为 100kHz 时，$\alpha_0 \approx 2\mathrm{dB/km}$，这时的阵长超过 2km，在这种情况下，9.1 节的远场理论几乎没有实用意义，为此，必须寻求一种远近场都能应用的理论。

伯克泰(Berktay)首先对参量阵的近场作了研究，他沿袭通常辐射换能器远场和近场的概念，将线源参量阵韦斯特维尔特积分取菲涅耳近似，得到了相应的近似表达式。值得指出，由于参量阵是分布性的源，取菲涅耳近似是不合理的。

根据(9.1.7)式和(9.1.8)式可知，对于原频率分别为 ω_1 和 ω_2，其吸收系数为 α_1 和 α_2 的双频参量阵，其差频声压为

$$p_{\mathrm{s}} = \frac{\rho_0 \omega_{\mathrm{s}}^2 A s_0}{4\pi} S(R, \vartheta) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_{\mathrm{s}} t} \tag{9.2.1}$$

式中，ω_{s}, A 和 s_0 定义和 9.1 节相同，而

$$S(R, \vartheta) = \int_0^l \frac{1}{r} \exp\left[-\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \mathrm{j}k\right)x - \left(\alpha + \mathrm{j}k\right)r\right] \mathrm{d}x \tag{9.2.2}$$

为书写简便，将 9.1 节的差频波数 k_s 简写为 k，式中 α 为差频波的吸收系数。

为了精确计算(9.2.2)式，应用展开定理

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}=-\mathrm{j}k\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)\mathrm{P}_n(\cos\vartheta)\,\mathrm{j}_n(kx)[\mathrm{h}_n^{(1)}(kR)]^*, & R>x\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)\mathrm{P}_n(\cos\vartheta)\,\mathrm{j}_n(kR)[\mathrm{h}_n^{(1)}(kx)]^*, & R<x\end{cases}\tag{9.2.3}$$

式中，$\mathrm{P}_n(\cos\vartheta)$ 为勒让德多项式，$\mathrm{j}_n(kx)$ 和 $\mathrm{h}_n^{(1)}(kx)$ 分别为球贝塞尔函数和第一类球汉开尔函数，星号表示取该量的共轭复数，因此

$$\left[\mathrm{h}_n^{(1)}(z)\right]^*=\frac{\mathrm{j}^{n+1}}{z}\mathrm{e}^{\mathrm{j}z}\left\{X_{n+\frac{1}{2}}(z)+\mathrm{j}Y_{n+\frac{1}{2}}(z)\right\}$$

式中

$$X_{n+\frac{1}{2}}(z)=1-\frac{n(n^2-1)(n+2)}{2^2 2!z^2}+\frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)(n+4)}{2^4 4!z^4}-\cdots$$

$$Y_{n+\frac{1}{2}}(z)=-\frac{n(n+1)}{2\cdot z}+\frac{n(n^2-1)(n^2-4)(n+3)}{2^3 3!z^3}-\cdots$$

首先讨论 $R>x$ 的情形(如果 $R<x$，则在所得结果中将 x 与 R 对调即可)，将这些关系代入(9.2.2)式，容易得到

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}=-\mathrm{j}k\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\mathrm{P}_n(\cos\vartheta)\,\mathrm{j}_n(kx)\frac{\mathrm{j}^{n+1}}{kR}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}$$
$$\times\left\{1+\sum_{m=1}^{n+1}\frac{(-\mathrm{j})^m}{2^m m!(kR)^m}\prod_{l=1}^{m}\left[n(n+1)-l(l-1)\right]\right\}$$

当 $m>n$ 时，有

$$\prod_{l=1}^{m}[n(n+1)-l(l-1)]=0$$

故上式中的求和次序可以交换，于是有

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}=-\mathrm{j}k\left\{\mathrm{j}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{j}^n(2n+1)\mathrm{P}_n(\cos\vartheta)\,\mathrm{j}_n(kx)+\mathrm{j}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-\mathrm{j})^m}{2^m m!(kR)^m}\right.$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{j}^{n}(2n+1)\mathrm{P}_{n}(\cos\vartheta)\,\mathrm{j}_{n}(kx)\cdot\prod_{l=1}^{m}\left[n(n+1)-l(l-1)\right]\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R} \tag{9.2.4}$$

因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{j}^{n}(2n+1)\mathrm{P}_{n}(\cos\vartheta)\,\mathrm{j}_{n}(kx)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx\cos\vartheta}$$

利用球函数方程

$$n(n+1)\mathrm{P}_{n}(\eta)=\left[2\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}-(1-\eta^{2})\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}\eta^{2}}\right]\mathrm{P}_{n}(\eta)$$

将这些结果代入(9.2.4)式，可得

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}T\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx\cos\vartheta}\right\} \tag{9.2.5}$$

式中算子 T 为

$$T=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathrm{j}^{m}}{2^{m}m!(kR)^{m}}\prod_{l=0}^{m}L^{(l-1)} \tag{9.2.6}$$

算子 $L^{(l-1)}$ 为 $l-1$ 阶勒让德算符

$$L^{(l-1)}=\begin{cases}1, & l=0\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[(1-\eta^{2})\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\right]+l(l-1), & l\geqslant 1\end{cases} \tag{9.2.7}$$

式中

$$\eta=\cos\vartheta \tag{9.2.8}$$

将这些结果代入(9.2.2)式，将积分拆成两部分，对应的积分限分别为(0, R)和(R, l)，后一部分称为反向辐射，由于这部分辐射相位较乱，可以证明，$(\alpha_1+\alpha_2)/k+\mathrm{j}(1-\cos\vartheta)\ll 1, kR\gg 1$，反向辐射部分可以忽略，故积分主要由前一部分的贡献，由此可得

$$S(R,\vartheta)=\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}k)R}T\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-BR}}{BR}\right) \tag{9.2.9}$$

式中

$$B=\alpha_1+\alpha_2+\mathrm{j}k(1-\cos\vartheta) \tag{9.2.10}$$

求积分(9.2.2)得到(9.2.9)式时，用了近似

$$\mathrm{e}^{-\alpha r}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\alpha(R-x\cos\vartheta)}, & x<R\\ \mathrm{e}^{-\alpha(x-R\cos\vartheta)}, & x>R\end{cases}$$

显然，算子 T 有无穷多项，其第一项为 1，令 $S(R,\vartheta)$ 的第一项为 $S_0(R,\vartheta)$，于是有

$$S_0(R,\vartheta)=\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}k)R}\frac{1-\mathrm{e}^{-BR}}{BR} \tag{9.2.11}$$

这正好是韦斯特维尔特远场解，由此可见，(9.1.9)式的解对应于(9.2.9)式的零级近似，而线源参量阵的一般解是将韦斯特维尔特的远场解进行 T 算子运算。将(9.2.9)式改写成

$$S(R,\vartheta)=\sum_{m=0}^{\infty}S_m(R,\vartheta) \tag{9.2.12}$$

则前几项 $S_m(R,\vartheta)$ 为

$$\left.\begin{aligned}
S_0(R,\vartheta)&=\frac{A_0}{kR}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}k)R}\\
S_1(R,\vartheta)&=\left\{-\mathrm{j}\frac{a}{2}\frac{A_2}{(kR)^3}+\cos\vartheta\frac{A_1}{(kR)^2}\right\}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}k)R}\\
S_2(R,\vartheta)&=\left\{-\frac{a^2}{8}\frac{A_4}{(kR)^5}-\mathrm{j}a\cos\vartheta\frac{A_3}{(kR)^4}-\left(\frac{3}{2}\sin^2\vartheta-1\right)\frac{A_2}{(kR)^3}\right\}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}k)R}\\
S_3(R,\vartheta)&=\left\{\mathrm{j}\frac{a^3}{48}\frac{A_6}{(kR)^7}-\frac{3a^2\cos\vartheta}{8}\frac{A_5}{(kR)^6}+\mathrm{j}\left(\frac{15}{8}\sin^2\vartheta-\frac{3}{2}\right)a\right.\\
&\quad\left.\times\frac{A_4}{(kR)^5}-\frac{5\sin^2\vartheta-2}{2}\cos\vartheta\frac{A_3}{(kR)^4}\right\}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}k)R}\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{9.2.13}$$

式中，$a=kR\sin\vartheta$，而

$$A_n=\int_0^{kR}z^n\,\mathrm{e}^{-Bz/k}\,\mathrm{d}z \tag{9.2.14}$$

且只要对 $S_m(R,\vartheta)$ 进行一次 m 阶勒让德算符的运算，即可得到 $S_{m+1}(R,\vartheta)$。

现在我们来讨论线源参量阵的性质。如果在(9.2.2)式中将$\frac{1}{r}$换成$\frac{1}{R}$，而将被积函数的相位部分的 r 取如下的近似，即当 $x<R$ 时，取

$$r \approx R - x\cos\vartheta + \frac{x^2}{2R}\sin^2\vartheta \tag{9.2.15}$$

将这些关系代入积分(9.2.2)，计算之后，可得

$$S(R,\vartheta) = S_0(R,\vartheta) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-\mathrm{j})^m}{2^m m!}(kR\sin^2\vartheta)^m \frac{A_{2m}}{(kR)^{2m+1}}\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}k)R} + \cdots \tag{9.2.16}$$

上面的结果称为菲涅耳近似，如果在(9.2.15)式中忽略右端第三项，则在(9.2.16)式中只有 $S_0(R,\vartheta)$ 这一项，这一近似类似于夫琅禾费近似。另外，如果在(9.2.16)式的各个 $S_m(R,\vartheta)$ 的右端只取第一项相加，其结果即为(9.2.16)式右端的前二项，或者说它与菲涅耳近似式相同。由(9.2.13)式容易看出，如果

$$\left| a\frac{A_l}{(kR)^{l+1}} \bigg/ \frac{A_{l-1}}{(kR)^{l-1}} \right| \gg 1$$

菲涅耳近似才对场值有主要贡献，这只有当

$$kR\sin^2\vartheta \gg 1, \qquad \sin^2\vartheta \gg \frac{|B|}{k} \tag{9.2.17}$$

上面的不等式才成立，即要求

$$\vartheta > \vartheta_d = \sqrt{\frac{2(\alpha_1+\alpha_2-\alpha)}{k}}$$

式中，ϑ_d 为半宽角，近似地与(9.1.12)式中所表示的结果相等。如 $\vartheta = 0$，(9.2.16)式表明菲涅耳近似对场毫无贡献，这些结果表明菲涅耳近似修正对参量阵的主瓣波束几乎没有贡献，只是对旁瓣有贡献。但这种参量阵没有旁瓣这一事实表明它对旁瓣的贡献也许会使近场出现旁瓣。

现在来讨论一种阵长为 R_1 的参量阵，或者称为截断参量阵，一个活塞型换能器的瑞利距离内原波声场产生的参量阵可以作为截断阵来处理，并且只讨论 $R>R_1$ 的情形。容易证明，这时有

$$S(R,\vartheta) = \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}k)R}}{R}T\left\{\frac{1-\mathrm{e}^{-BR_1}}{B}\right\} \tag{9.2.18}$$

而且在(9.2.14)中将 R 换面 R_1，并取轴向场，即令 $\vartheta=0$，这时 $S(R,\vartheta)=S(R,0)$，且有

$$S(R,0)=\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}k)R}=\sum_{m=0}^{\infty}B_m\left(\frac{R_1}{R}\right)^{m+1} \tag{9.2.19}$$

式中

$$A_m=\int_0^{kR_1}z^m\,\mathrm{e}^{-Bz/k}\,\mathrm{d}z$$

$$B_m=\left[\frac{A_m}{(kR)^{m+1}}\right]_{\substack{R=R_1\\ \vartheta=0}}=\frac{\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)R_1}}{m+1}\left\{1+\frac{(\alpha_1+\alpha_2)R_1}{m+2}+\frac{(\alpha_1+\alpha_2)^2R_1^2}{(m+2)(m+3)}+\cdots\right\}$$

当 R_1 小于参量阵的阵长时，即 $R_1<(\alpha_1+\alpha_2)^{-1}$，有

$$\begin{aligned}\frac{1}{m+1}\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)R_1}<B_m&<\frac{1}{m+1}\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)R_1}\left\{1+\frac{(\alpha_1+\alpha_2)R_1/(m+2)}{1-(\alpha_1+\alpha_2)R_1/(m+2)}\right\}\\&=\frac{m+2}{m+2-(\alpha_1+\alpha_2)R_1}\frac{1}{m+1}\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)R_1}\end{aligned}$$

因 $(\alpha_1+\alpha_2)R_1$ 比 $m+2$ 小很多，故有

$$B_m\approx\frac{1}{m+1}\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)R_1}$$

或者

$$\begin{aligned}S(R,0)&\approx\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}k)R}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\left(\frac{R_1}{R}\right)^{m+1}\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)R_1}\\&=\mathrm{e}^{-(\alpha+\mathrm{j}k)R-(\alpha_1+\alpha_2)R_1}\ln\left(\frac{R}{R-R_1}\right)\end{aligned} \tag{9.2.20}$$

通常换能器的瑞利距离 R_1 比起参量阵阵长 $(\alpha_1+\alpha_2)^{-1}$ 小很多，忽略差频本身的吸收，将(9.2.20)式代入(9.2.1)式，可以得差频声压

$$p_c\approx\frac{\beta P_0^2S_0\omega^2}{4\pi\rho C^4}\ln\frac{R}{R-R_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kR)} \tag{9.2.21}$$

从(9.1. 9)式可知，远场轴向差频声压与频率的关系正比于 ω^2/α_0，当 $\alpha_0 \sim \omega_0^2$ 时，声压正比于 $(\omega/\omega_0)^2$，其中 ω_0 为原波频率，ω 为差频频率，而 ω/ω_0 称为频率下降比。但对于截断参量阵来说，其频率关系却是

$$|p_c| \sim \omega^2 \ln\frac{R}{R-R_1} \tag{9.2.22}$$

按照远场理论，在差频频率一定时，声压反比于原频率的平方。但由(9.2.22)式看来，当 $R_1 < R$ 时，原频增大，R_1 增大，$|p_c|$ 增大，与远场理论的结论相反，如果 R_1/R 很小时，有

$$|p_c| \sim \frac{\omega^2 R_1}{R} \sim \omega^2 \omega_0 \tag{9.2.23}$$

这个结果表明，对于浅水的参量阵来说，在可能范围内，适当提高原频率是有好处的，这一结论已在实验中得到证实。

9.3　矩形孔径参量阵[3, 4]

9.2 节讨论的线源参量阵的辐射截面积很小，这种参量阵的指向性因子如(9.1.10)式右端的第二因子所示，通常将这个指向性因子称为卢瑟福散射因子。但实际换能器总是具有一定的截面积，也就是说有一定大小的孔径，为了研究孔径对参量阵辐射场的影响，首先讨论矩形孔径参量阵。

设有一矩形声源，它沿 y 方向的宽度为 2b，没 z 轴方向的宽度为 2d，现在来计算图 9.4 中厚度为 dx 的一个薄层上任一体元 dxdydz 在观察点的声辐射。根据(9.1.5)式~(9.1.7)式可知，这部分源所产生的参量声压可表示为

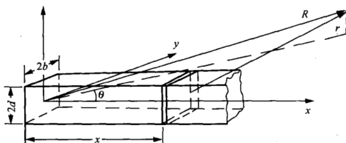


图 9.4　矩形孔径参量阵

$$\mathrm{d}\,p(r,t) = -\frac{\rho_0}{4\pi r}\mathrm{e}^{-\alpha r}\frac{\partial}{\partial t}\left\{q\left(t-\frac{r}{C_0}\right)\right\}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z \tag{9.3.1}$$

式中，$q(t)$ 为参量阵的源强，α 为差频波的吸收系数，ρ_0 和 C_0 分别为介质的密度和声速。

如果原频波为平面波准直束，即它的数学表达式可表示为

$$p=\begin{cases}P_1\,\mathrm{e}^{-\alpha_1 x}\cos(\omega_1 t-k_1 x)+P_2\,\mathrm{e}^{-\alpha_2 x}\cos(\omega_2 t-k_2 x), & |y|\leqslant b,|z|\leqslant d\\ 0, & |y|>b,|z|>d\end{cases}\tag{9.3.2}$$

将(9.3.2)式代入到(9.1.6)式中可以算得

$$q(t)=-\frac{\omega}{\rho_0^2 C_0^4}P_1P_2\,\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)x}\sin(\omega t-kx)\tag{9.3.3}$$

式中

$$|\omega_1-\omega_2|=\omega,\quad |k_1-k_2|=k$$

众所周知，在原波为平面波准直束的情况下，位于 x 厚度为 $\mathrm{d}x$ 的薄层上，辐射源是均匀分布的同相源，它在远场的辐射正比于

$$2b\times 2d\frac{\sin(Kd\cos\gamma)}{Kd\cos\gamma}\frac{\sin(Kb\sin\gamma\cdot\sin\vartheta)}{Kb\sin\gamma\cdot\sin\vartheta}$$

式中，γ 为矢径 R 与 z 轴的夹角，ϑ 为 R 在(x,y)平面内的投影与 x 轴的交角。为使计算简便，假设观察点是(x,y)平面内的远场点(即 $\gamma=\pi/2$，$r\gg x$，$r=R-x\cos\vartheta$)，将这些关系代入(9.3.1)式容易算出观察点的差频声压振幅，为

$$P(R,\vartheta)=|p_s(R,\vartheta)|\frac{\sin(Kb\sin\vartheta)}{Kb\sin\vartheta}\tag{9.3.4}$$

式中，$p_s(R,\vartheta)$ 即为(9.1.9)式所表示的参量阵远场声压。由此可见，换能器孔径在远场对参量阵的影响只是将线阵的声压振幅乘上孔径的指向性函数。根据这一结果立即得到如下的推论，对于一个圆形孔径来说，只要乘上孔径因子

$$\frac{2J_1(ka\sin\vartheta)}{ka\sin\vartheta}$$

即可得到相应的参量声压振幅。关于孔径影响的理论与实验比较见图 9.5。这里用的是 $9\mathrm{cm}^2$ 的方形换能器，频率为 3MHz，实验是在远场做的。图 9.5 中的曲线 I 是根据(9.1.12)式算得的理论曲线；曲线 II 是在(9.1.12)式的基础上进一步考虑了孔径因子的修正曲线；曲线Ⅲ是用这个换能器直接辐射差频信号时的束宽；曲线Ⅳ是

实验结果的平均值。由此可见，考虑到孔径修正后，远场指向性的理论与实验符合得好一些(图中○，●，△，□是实验点)。

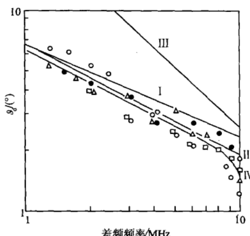


图 9.5 参量阵波束半宽角与差频的关系

9.4 圆形活塞换能器参量阵的设计模型[16~18]

我们在前几节讨论的参量阵都是纯理论型的，还不能直接应用于实际，而在工程设计中，人们希望能有一套理论曲线组成的系统设计图表付之应用，为此，下面将介绍圆形活塞换能器构成的参量阵设计模型。

众所周知，一个具有无限障板的圆形活塞的辐射场指向性图的轮廓是喇叭形，即在瑞利距离 $R_0 = s/\lambda$ 内，其轴上的声场具有平面波特性，通常将这个距离内的场称为近场，而将 R_0 称为近场距离(更精确的数值计算表明，近场距离应为 $0.75R_0$)。而在这个距离之外，场逐步过渡为球面波场(远场)。这里 s 为换能器的有效辐射面积，λ 是辐射波的波长，为了方便于实际设计，通常将其辐射波束简化为规则形状(图 9.6)，显然，这种波束是用两个参数 R_0 和 ϑ_0 来描述的，两者满足下述关系

$$\vartheta_0 = \arctan\sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi R_0}} \approx \sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi R_0}} \tag{9.4.1}$$

这个关系可以由换能器指向性指数的定义求出。如果波束宽度为 $2\vartheta_0$，图 9.6 中波束的指向性系数①为

$$\frac{4\pi R^2 \bullet I_0}{I_0 \bullet \pi(R\tan\vartheta_0)^2}=\frac{4}{\tan^2\vartheta_0}$$

图 9.6 圆形活塞辐射场的简化波束图形

另外，由于障板圆形活塞的指向性指数为 $4\pi s/\lambda_0^2=4\pi R_0/\lambda_0$，使这两个关系相等即可得到(9.4.1)式。

显然，这种活塞辐射的原频波声压可表示为

$$T(r')\frac{P_0R_0D_0(\vartheta',\varphi')}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t-k_0 r')}$$

式中，(r',ϑ',φ') 为球坐标，ω_0 和 k_0 分别为原频波的角频率与波数，$T(r')$ 为原波的振幅衰减因子。由 9.1 节可知，差频波压力可用(9.1.7)式表示，本节将它写得更详细一些，即

$$p(\boldsymbol{r},\vartheta,\tau)=\frac{\rho_0}{4\pi}\iiint\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial}{\partial t}\left[q\left(\boldsymbol{r}',t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{C_0}\right)\right] \tag{9.4.2}$$

式中，$\boldsymbol{r}'$ 为分布源的坐标矢量，$\boldsymbol{r}$ 为场点的坐标矢量，积分体积是属于两个原频波束的重叠区，q 为参量阵的源强，其表示如(9.1.6)式所示。一般说来，上面的积分不易计算，故下面只是计算声轴上的差频远场压力。本节所说的远场是指其距离比参量阵的有效长度大很多的情况。

设活塞发射两个角频率为 $\omega_0\pm\frac{1}{2}\omega$ 的原波，应用(9.4.1)式来计算原波，再将原频波式代入(9.1.6)式中求出源函数，然后将结果代到(9.4.2)式，最终算出轴上远场

① 将它取 10 lg 之后即为指向性指数。

差频声压为

$$p(r,0,t)=\frac{\beta P_0^2 R_0 \omega^2}{2\rho_0 C_0^3 \omega_0 r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}(I_1+I_2) \tag{9.4.3}$$

而

$$I_1 \equiv \int_0^{R_0} T^2(r')\,\mathrm{d}r' \tag{9.4.4}$$

$$I_2 \equiv \int_{R_0}^{\infty}\left(-\mathrm{j}\frac{\omega_0 R_0}{\omega r'}\right)\left[1-\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\omega r'}{\omega_0 R_0}\right)\right]T^2(r')\,\mathrm{d}r' \tag{9.4.5}$$

式中，k 为差频波数，I_1 相应于准直束(即瑞利距离以内的相互作用区)参量阵的辐射场，I_2 相应于扩散束(即瑞利距离以外的相互作用区)参量阵的辐射场，其中的 $T(r)$起着束控函数的作用，它表示原频波束遭受到的振幅吸收。下面给出上面 3 个表达式的证明。

设 p_1,p_2 为两个原波声压，因为只考虑差频声波，故有 $p^2=(p_1+p_2)^2 \to p_1 p_2^*, p_2^*$ 是 p_2 的共轭值，在准直束内，两个原波声场可表示为

$$p_{1,2}=p_0 T(r')\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left[\left(\omega_0 \pm \frac{\omega}{2}\right)t-\left(k_0 \pm \frac{k}{2}\right)r'\right]}$$

式中，规定下标为 1 时，指数式中取正号，下标为 2 时，指数式中取负号，于是有

$$p^2 \to p_0^2 T^2(r')\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr')}$$

按(9.1.6)式可以算出源函数 q。将 q 代入到(9.4.2)式，首先计算准直束区的参量场，将它分成许多厚为 $\mathrm{d}r'$ 的薄片，任一薄片上半径为 η 的圆环与 r 点的距离为(图 9.5)

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(r-r')^2+\eta^2}$$

于是准直束相互作用区在 r 点产生的差频声压为

$$p_c(r,0,t)=-\frac{\beta\omega^2 P_0^2}{4\pi\rho_0 C_0^4}Q_c$$

$$Q_c=\int_0^a\int_0^{R_0}\frac{T^2(r')}{\sqrt{(r-r')^2+\eta^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr'-\mathrm{j}k\sqrt{(r-r')^2+\eta^2}}\,2\pi\eta\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}r'$$

$$=\frac{2\pi}{\mathrm{j}k}\int_0^{R_0}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\sqrt{(r-r')^2+a^2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(r-r')}\right\}T^2(r')\mathrm{d}r'$$

设$4k(r'^2+a^2)r'/r^2\ll\pi$，近似地有

$$\left[(r-r')^2+a^2\right]^{1/2}\approx r-r'+\frac{a^2}{2r}$$

于是容易得到远场近似

$$Q_c=\frac{2\pi}{\mathrm{j}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}ka^2/2r}-1)\int_0^{R_0}T^2(r')\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr'}\mathrm{d}r'$$

因为$r\gg R_0$，故有

$$Q_c\approx-\frac{\pi a^2}{r}\int_0^{R_0}T^2(r')\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr'}\mathrm{d}r'=-\frac{\lambda_0R_0}{r}\int_0^{R_0}T^2(r')\mathrm{e}^{\mathrm{j}kr'}\mathrm{d}r'\approx-\frac{\lambda_0R_0}{r}\int_0^{R_0}T^2(r')\mathrm{d}r'$$

这其中认为R_0比差频波长小得多，于是有

$$p_c(r,0,t)=\frac{\beta R_0P_0^2\omega^2}{2\rho_0C_0^3\omega_0r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}\int_0^{R_0}T^2(r')\mathrm{d}r'=\frac{\beta R_0P_0^2\omega^2}{2\rho_0C_0^3\omega_0r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}I_1$$

对于球面扩散区的r点产生的差频声压的计算完全类似，原波仍是(9.4.1)式所表示的那种类型，因而源函数q也相同，不同的只是积分体积，因此这部分辐射场可写为

$$p_s=-\frac{\beta P_0^2R_0\omega^2}{4\pi\rho_0C_0^4}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}Q_s$$

$$Q_s=2\pi\int_{R_0}^{\infty}\int_0^{\vartheta_0}\frac{T^2(r')}{r'^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr'}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}}}{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}r'^2\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}r'$$

将上式先对ϑ积分，并取远场近似，即

$$\left[r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta_0\right]^{1/2}\approx r-r'\cos\vartheta_0\approx r-r'\left(1-\frac{\vartheta_0^2}{2}\right)$$

由于

$$\vartheta_0\approx\arctan\left(\frac{\lambda_0}{\pi R_0}\right)^{1/2}\approx\sqrt{\frac{\lambda_0}{\pi R_0}}$$

利用这些结果，得到

$$Q_s = -\frac{2\pi}{\mathrm{j}kr}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}\int_{R_0}^{\infty}\frac{T^2(r')}{r'}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(1-\cos\theta_0)r'}-1\right]\mathrm{d}r'$$
$$= -\frac{2\pi}{k_0R_0}\int_{R_0}^{\infty}\left(-\mathrm{j}\frac{\omega_0R_0}{\omega r'}\right)T^2(r')\left[1-\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\omega r'}{\omega_0R_0}\right)\right]\mathrm{d}r'\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$$

或者

$$p_s(r,0,t) = \frac{\beta P_0^2R_0\omega^2}{2\rho_0C_0^3\omega_0 r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}\int_{R_0}^{\infty}\left(-\mathrm{j}\frac{\omega_0R_0}{\omega r'}\right)T^2(r')$$
$$\times\left[1-\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\omega r'}{\omega_0R_0}\right)\right]\mathrm{d}r' = \frac{\beta P_0^2R_0\omega^2}{2\rho_0C_0^3\omega_0 r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}I_2$$

将 p_c 与 p_s 相加即可得到(9.4.3)式~(9.4.5)式，现在我们来简化这几个式子。通常 $\omega_0/\omega \gg 1$，故知 $0 \leqslant r' \leqslant R_0$ 时，必有

$$r' \ll \frac{\omega_0}{\omega}R_0 \tag{9.4.6}$$

这时下述近似也成立：

$$-\mathrm{j}\frac{\omega_0R_0}{\omega r'}\left[1-\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\omega r'}{\omega_0R_0}\right)\right] \approx 1$$

由此可见必有

$$\int_0^{R_0}\left(-\mathrm{j}\frac{\omega_0R_0}{\omega r'}\right)\left[1-\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\omega r'}{\omega_0R_0}\right)\right]T^2(r')\mathrm{d}r' \approx \int_0^{R_0}T^2(r')\mathrm{d}r'$$

将它代入(9.4.4)式，于是(9.4.3)式可以写成

$$p(r,0,t) = \frac{\beta P_0^2\omega^2R_0}{2\rho_0C_0^3\omega_0 r}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kr)}\int_0^{\infty}\left(-\mathrm{j}\frac{\omega_0R_0}{\omega r'}\right)$$
$$\times\left[1-\exp\left(-\mathrm{j}\frac{\omega r'}{\omega_0R_0}\right)\right]T^2(r')\mathrm{d}r' \tag{9.4.7}$$

显然，这个积分有如下的性质，当$r' \ll \frac{\omega_0}{\omega}R_0$时，被积函数接近于 1，当$r' \geqslant \frac{\omega_0}{\omega}R_0$时，被积函数的指数函数部分是快速振荡函数，它的积分值很小，故在这个距离之外，被积函数起主要作用的只是$-j\omega_0 R_0/\omega r'$，因此，我们可以选下述代数表达式：

$$\left(1+\mathrm{j}\frac{\omega r'}{\omega_0 R_0}\right)^{-1} \tag{9.4.8}$$

来代替(9.4.7)式中的被积函数。定义参量阵的复增益为

$$g=\frac{rp(r,0,t)}{R_0 P_0}=|g|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\gamma} \tag{9.4.9}$$

于是有

$$g=\frac{\chi}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\int_0^\infty T^2(r')\left(1+\mathrm{j}\frac{\omega r'}{\omega_0 R_0}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}r'}{R_0} \tag{9.4.10}$$

式中

$$\chi=\frac{\beta P_0\omega_0 R_0}{\rho_0 C_0^3} \tag{9.4.11}$$

显然，$(\beta\omega_0 P_0/\rho_0 C_0^3)^{-1}$为平面波的冲击波形成距离，当$\chi \leqslant 1$时，表明原频波在瑞利距离以内就要形成冲击波，因此，参数χ是对在准直束内是否会形成冲击波的一个直接判别量。

现在来研究$T^2(r)$对场的影响。由(9.1.12)式可知，吸收系数是直接决定波束宽度的一个量，有时它被称作束控函数。当原频波的衰减是小振幅吸收起主要作用时，由(9.4.1)式可知，有

$$T^2(r)=\mathrm{e}^{-2\bar{\alpha}r} \tag{9.4.12}$$

如果衰减是有限振幅吸收起主要作用时，可以证明[17]

$$T^2(r)=\frac{2}{K^2}\left[\frac{1+K}{(1+2K)^{1/2}}-1\right]\mathrm{e}^{-2\bar{\alpha}r} \tag{9.4.13}$$

式中，$\bar{\alpha}$ 为原频波的小振幅吸收系数，而

$$K = 3\left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^2 \tag{9.4.14}$$

$$\sigma = 2\chi \operatorname{arsinh}\left(\frac{r}{R_0}\right) \tag{9.4.15}$$

将这些关系代入(9.4.10)式来计算参量阵的复增益。可以看出，它决定于 3 个量，即 ω_0/ω, $\bar{\alpha}R_0$ 以及 χ，这些参数的物理意义是很清楚的，ω/ω_0 是原波频率与差频频率之比，通常称为频率下降比；$\bar{\alpha}R_0$ 是瑞利距离(或准直束长度)与参量阵阵长之比；χ 是瑞利距离与冲击波形成距离之比。图 9.7 作出了 $G = 20\lg|g|$ 与 L_0^* 的关系曲线，介质是水，$\omega_0/\omega = 10$ 这里

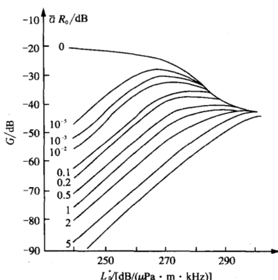


图 9.7　增益 G 与 L_0^* 的关系

$$L_0^* = L_0(\mathrm{dB}/\mu\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}) + 20\lg f_0(\mathrm{kHz})$$

L_0 为原频波的方均根源级，图 9.7 中是以 $\bar{\alpha}R_0$ 为参数作出一族曲线，$\bar{\alpha}$ 是原频吸收系数(dB/单位长度)；图 9.8 作出相同情况下的参量阵增益相角 γ 与 L_0^* 的关系，由结果可以看出，当源级高到一定的程度之后，各种情况下的 G 和 γ 收敛到一定的极限值。

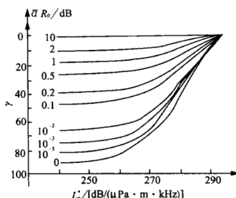


图 9.8 增益相角与 L_0^* 的关系

9.5 宽带参量阵[19~24]

以上讨论的参量阵的原频波是两个正弦单频波，它的差频波是只有一个频率成分的正弦波；如果原波是一个宽带信号，一般说来，它总可以用傅里叶积分表示，而被积函数是单频正弦波，无限多个频率成分的两两相互作用产生一个宽带差频信号，从而构成了所谓宽带参量阵，而原波为两个正弦波的参量阵称作双频参量阵。

下面将讨论一种特殊原波的宽带参量阵，它的原频信号是正弦填充脉冲，即

$$p_i(x,t) = p_0\,\mathrm{e}^{-\alpha_0 x} f(t - x/C_0)\cos(\omega_0 t - k_0 x) \tag{9.5.1}$$

式中，α_0, ω_0 和 k_0 分别为原波填充频率波的吸收系数、角频率和波数，P_0 为原波振幅，$f(t)$ 为脉冲的包迹。当然，由信号的定义可知，(9.5.1)式所表示的是窄带信号，但它所产生的差频信号的相对带宽是很宽的。从上式可得

$$p_i^2(x,t) = \frac{1}{2}P_0^2\,\mathrm{e}^{-2\alpha_0 x} f^2\left(t - \frac{x}{C_0}\right)\cdot\left[1+\cos(2\omega_0 t - 2k_1 x)\right]$$

将这个结果代入(9.1.6)式，忽略其中的二阶谐波的快速振动项，最终可得源函数

$$q(x,t) = \frac{\beta P_0^2}{2\rho_0^2 C_0^4}\mathrm{e}^{-2\alpha_0 x}\frac{\partial}{\partial t}\left\{f^2\left(t - \frac{x}{C_0}\right)\right\} \tag{9.5.2}$$

将(9.5.2)式代入(9.1.7)式，可得参量声压：

$$p(r,\vartheta,t)=-\frac{s\rho_0}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{r'}\mathrm{e}^{-\alpha r'}\frac{\partial}{\partial t}\left\{q\left(x,t-\frac{r'}{C_0}\right)\right\}\mathrm{d}x \tag{9.5.3}$$

将(9.5.2)式代入(9.5.3)式并对所得结果进行一次傅里叶积分变换，即进行 $p(r,\vartheta,t)\Leftrightarrow P(r,\vartheta,\omega), P(r,\vartheta,\omega)$ 为 $p(r,\vartheta,t)$ 的频谱，于是得到

$$P(r,\vartheta,\omega)\approx\frac{P_0^2 s}{16\pi\rho_0 C_0^4\alpha_0 r}\frac{\omega^2 F_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega r/C_0}}{1+\mathrm{j}\omega\sin^2(\vartheta/2)/\alpha_0 C_0} \tag{9.5.4}$$

式中，s 为原波波束截面积，F_0 为 $f^2(t)$ 的傅里叶变换，而(9.5.4)式是在 $r>>1/\alpha_0$ 的条件下得到的。对(9.5.4)式进行逆傅里叶变换即可得到宽带参量阵的差频声压表达式，显然所得到的积分是不易求积的，本节将借助于卷积定理来求这一积分。为此，首先定义

$$H(\omega,\vartheta)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega B} \tag{9.5.5}$$

$$G(\omega,r)=F_0(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega r/C_0} \tag{9.5.6}$$

$$B=\frac{1}{\alpha_0 C_0}\sin^2\frac{\vartheta}{2},\qquad A=\frac{P_0^2 s}{16\pi\rho_0 C_0^4\alpha_0 r} \tag{9.5.7}$$

定义 $H(\omega,\vartheta)$ 的逆傅里叶积分为 $h(t,\vartheta)$，于是当 $\vartheta\neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned}h(t,\vartheta)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega,\vartheta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{B}\mathrm{e}^{-t/B}, & t\geqslant 0\end{cases}\end{aligned} \tag{9.5.8}$$

而当 $\vartheta\to 0$ 时，有

$$h(t,\vartheta)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases} \tag{9.5.9}$$

即 $h(t,0)=\delta(t)$ 为狄拉克函数，由前面的定义可知

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_0(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\left(t-\frac{r}{C_0}\right)}\mathrm{d}\,\omega=f^2\left(t-\frac{r}{C_0}\right) \tag{9.5.10}$$

定义 $f^2\left(t-\dfrac{r}{C_0}\right)=g(t,r)$，它的频谱是 $G(\omega,r)$，利用这些结果可得

$$p(r,\vartheta,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}AH(\omega,\vartheta)G(\omega,r)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\omega^2\,\mathrm{d}\,\omega \tag{9.5.11}$$

对(9.5.10)式进行两次时间导数运算并将所得结果以及(9.5.8)式代入(9.5.11)式，再应用著名的傅里叶积分卷积定理可得

$$p(r,\vartheta,t)=-A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{\infty}h(u)g(t-u,r)\mathrm{d}u \tag{9.5.12}$$

式中，A 如(9.5.7)式所示。这个式子表明，本来在频域内的积分被换成在时域内的积分，这样，使得在频域内难以求积的问题，有时在时域能够很容易地求得解决。由(9.5.9)式可知，当 $\vartheta=0$ 时，$h(t,0)=\delta(t)$，这时(9.5.12)式成为

$$p(r,0,t)=-A\frac{\partial^2}{\partial t^2}f^2\left(t-\frac{r}{C_0}\right) \tag{9.5.13}$$

(9.5.13)式表示轴上声压，它是包迹函数平方的二次导数。下面我们来举几个例子说明所得结果的应用。

例 1 高斯包迹填充信号。

$$f(t)=\exp(-n^2t^2) \tag{9.5.14}$$

代入(9.5.12)式可以算出

$$p(r,\vartheta,t)=\frac{A\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}nB}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\exp\left[-\frac{t}{B}-\frac{1}{4B^2n^2}\right]\right.$$
$$\left.\times\left\{1-\Phi\left[\frac{n}{B\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2n^2}-2Bt\right)\right]\right\}\right) \tag{9.5.15}$$

式中

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\exp(-t^2)\mathrm{d}t$$

当 B 很小时，近似地有

$$p(r,\vartheta,t) \approx 4n^2 A\left[\frac{4n^2t^2-1}{1-4n^2Bt} - \frac{8n^2Bt}{(1-4n^2Bt)^2} + O(B^2)\right]\exp(-2n^2t^2) \tag{9.5.16}$$

在 B=0，即 $\vartheta=0$，有

$$p(r,\vartheta,t) = 4n^2 A(4n^2t^2-1)\exp(-2n^2t^2) \tag{9.5.17}$$

从这两个式子可见，在声源的对称轴上，参量声压波形上下是不对称的(图 9.9)，图 9.9(a)是高斯包迹填充脉冲原波，图 9.9(b)是参量波形。为书写简便起见，这里和今后的 t 实为 $t-r/C_0$。

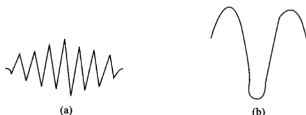


图 9.9　高斯包迹填充脉冲

(a)原波波形；(b)参量波形

例 2　矩形正弦填充脉冲。

这种原波的包迹函数为

$$f(t) = [U(t+\varDelta) - U(t-\varDelta)]$$

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$$

$$U'(t) = \delta(t)$$

将 $f(t)$代入(9.5.12)式，容易得到

$$p(r,\vartheta,t) = -A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{1}{B}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u/B}\left[U(t+\varDelta-u) - U(t-\varDelta-u)\right]^2 \mathrm{d}u\right\}$$

显然，当 $t+\varDelta \leqslant 0$ 时($2\varDelta$ 为脉冲宽度)，有

$$p(r,\vartheta,t) = 0 \tag{9.5.18}$$

当 $t+\varDelta \geqslant 0 \geqslant t-\varDelta$ 时，有

$$p(r,\vartheta,t)=-A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{1}{B}\int_0^{t+\varDelta}\mathrm{e}^{-u/B}\,\mathrm{d}u\right\}$$

$$=-A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[1-\mathrm{e}^{-(t+\varDelta)/B}\right]=A\delta_B'(t+\varDelta) \tag{9.5.19}$$

式中

$$\delta_B(t)=\frac{1}{B}\mathrm{e}^{-t/B} \tag{9.5.20}$$

且有

$$\delta_B(t)\big|_{B\to 0}=\delta(t) \tag{9.5.21}$$

当$t-\varDelta\geqslant 0$时，有

$$p(r,\vartheta,t)=-A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{1}{B}\int_{t-\varDelta}^{t+\varDelta}\mathrm{e}^{-u/B}\,\mathrm{d}u\right\}=A\left[\delta_B'(t+\varDelta)-\delta_B'(t-\varDelta)\right] \tag{9.5.22}$$

由(9.5.18)式可知，当$t\leqslant-\varDelta$(即在原波脉冲之外)参量压力为零；由(9.5.19)式可知，如果$|t|\leqslant\varDelta$，即在原波脉冲之内，参量压力为$A\delta_B'(t+\varDelta)$，当$\vartheta=0$时，$B=0$，于是$A\delta_B'(t+\varDelta)\big|_{B\to 0}=A\delta'(t+\varDelta)$，即在原波脉宽内，在声轴上参量压力是在$t=-\varDelta$附近的$\delta'$刺状脉冲；如$t\geqslant\varDelta$。参量压力为$A\left[\delta_B'(t+\varDelta)-\delta_B'(t-\varDelta)\right]$，当$\vartheta=0$时，$\delta_B'\to\delta'$，由于$t+\varDelta>0$故$\delta'(t+\varDelta)=0$，于是在声轴上只有在时刻$t=\varDelta$附近为$-\delta'(t-\varDelta)$的刺状脉冲。总起来说，当原波为矩形包迹正弦填充脉冲时，其参量压力波形为在$t=\pm\varDelta$处的两个刺状δ'脉冲，其相位相反(图 9.10)。

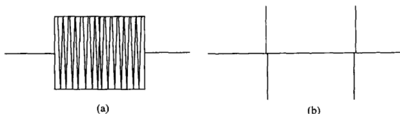


图 9.10 矩形包迹正弦填充脉冲的原波及参量波波形

(a)原波；(b)参量波

以上讨论的两种信号的包迹函数是非常特殊的，例 1 的包迹是从零平滑地过渡到有限值；例 2 的包迹函数在边缘处有间断，下面将讨论两种包迹信号，其包迹的前后沿很接近于实际使用的情形。

例 3　具有正弦填充的第一类包迹。

$$f(t)=\begin{cases}\cos\omega_0 t, & \begin{cases}-NT-\dfrac{T}{4}\leqslant t\leqslant -NT\\ NT\leqslant t\leqslant NT+\dfrac{T}{4}\end{cases}\\ 1, & -NT\leqslant t\leqslant NT\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\tag{9.5.23}$$

(9.5.23)式表明，这种信号包迹的前后沿的上升和下降速率相同于载波。将这个式子代入(9.5.12)式，容易得到下述结果：

(1)当 $t<-NT-\dfrac{T}{4}$ 时，有

$$p(r,\vartheta,t)=0\tag{9.5.24}$$

(2)当 $-NT-\dfrac{T}{4}\leqslant t\leqslant -NT$ 时，有

$$\begin{aligned}p(r,\vartheta,t)=A\Bigg\{&\frac{2B^2\omega_0^2}{1+4B^2\omega_0^2}\delta_B'\left(t+NT+\frac{T}{4}\right)\\&-\frac{2\omega_0^2}{1+4B^2\omega_0^2}(\cos 2\omega_0 t+2B\omega_0\sin 2\omega_0 t)\Bigg\}\end{aligned}\tag{9.5.25}$$

当 $B=0,\vartheta=0$ 时，有

$$p(r,0,t)=-2A\omega_0^2\left[\cos 2\omega_0 t+D\left(t+NT+\frac{T}{4}\right)\right]\tag{9.5.26}$$

式中

$$D(t)=\begin{cases}1, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}\tag{9.5.27}$$

(3) 当 $-NT\leqslant t\leqslant NT$ 时，有

$$p(r,\vartheta,t)=\frac{A}{2}\cdot\frac{4B^2\omega_0^2}{1+4B^2\omega_0^2}\left[\delta_B'(t+NT)+\delta_B'\left(t+NT+\frac{T}{4}\right)\right] \tag{9.5.28}$$

当 $\vartheta=0$ 时，有

$$p(r,0,t)=-2A\omega_0^2D(t+NT) \tag{9.5.29}$$

(4) 当 $NT\leqslant t\leqslant NT+\frac{T}{4}$ 时，有

$$\begin{aligned}p(r,\vartheta,t)=\frac{2A\omega_0^2}{1+4B^2\omega_0^2}\Bigg\{&-\cos 2\omega_0 t-2B\omega_0\sin 2\omega_0 t\\&+B^2\left[-\delta_B'(t-NT)+\delta_B'(t+NT)+\delta_B'\left(t+NT+\frac{T}{4}\right)\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{9.5.30}$$

当 $\vartheta=0$ 时，有

$$p(r,0,t)=-2A\omega_0^2\left[\cos 2\omega_0 t-D(t-NT)\right] \tag{9.5.31}$$

(5) 当 $t\geqslant NT+\frac{T}{4}$ 时，有

$$\begin{aligned}p(r,\vartheta,t)=\frac{2A\omega_0^2B^2}{1+4B^2\omega_0^2}&\left[-\delta_B'(t-NT)+\delta_B'(t+NT)\right]\\&+\delta_B'\left(t+NT+\frac{T}{4}\right)-\delta_B'\left(t-NT-\frac{T}{4}\right)\end{aligned} \tag{9.5.32}$$

当 $\vartheta=0$ 时，有

$$p(r,0,t)=2A\omega_0^2D\left(t-NT-\frac{T}{4}\right)\Bigg] \tag{9.5.33}$$

根据(9.5.24)式, (9.5.26)式, (9.5.29)式, (9.5.31)式和(9.5.23)式，可以作出对应于第一类包迹的参量声压在声轴上的波形(图 9.11)。众所周知，当包迹是严格矩形时，参量波形是两根刺状的 $\delta'(t)$ 脉冲，其位置分别处在矩形包迹的前后沿处(图 9.9)。而当包迹函数如(9.5.23)式所示时，参量波形却是两个 N 形脉冲(图 9.11)。

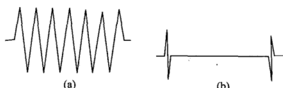


图 9.11　具有正弦填充的第一类包迹信号及其参量波形

(a)原波；(b)参量波

例 4　具有正弦填充的第二类包迹。

我们定义第二类包迹为

$$f(t)=\begin{cases} a\cos\omega_0 t, & NT\leqslant |t|\leqslant NT+\dfrac{T}{4} \\ 1+et^2+\mathrm{d}t^4, & -NT\leqslant t\leqslant NT \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{9.5.34}$$

规定 $f(t), f'(t)$ 和 $f''(t)$ 连续，并且 $f'(0)=1$，这样可以定出常数

$$a=-\frac{2}{N^2\pi^2-2},\quad e=\frac{a\omega_0^2}{4},\quad d=-\frac{a\omega_0^4}{32N^2\pi^2} \tag{9.5.35}$$

将(9.5.34)式代入(9.5.12)式，可得下述结果：

(1) 当 $t<-NT-\dfrac{T}{4}$ 时，有

$$p(r,\vartheta,t)=0 \tag{9.5.36}$$

(2) 当 $-NT-\dfrac{T}{4}\leqslant t\leqslant -NT$ 时，$p(r,\vartheta,t)$ 的表示完全同于(9.5.25)式，轴上场也完全同于(9.5.26)式；

(3) 当 $-NT\leqslant t\leqslant NT$ 时，有

$$\begin{aligned} p(r,\vartheta,t)=&A\frac{\partial^2}{\partial t^2}F_1(t,B)+AF_1(-NT,B)\delta_B'(t+NT) \\ &+\frac{2Aa^2B^2\omega_0^2}{1+4B^2\omega_0^2}\delta_B'\left(t+NT+\frac{T}{4}\right) \\ &-\frac{Aa^2}{2}\left(1+\frac{1}{1+4B^2\omega_0^2}\right)\delta_B'(t+NT) \end{aligned} \tag{9.5.37}$$

式中

$$F_1(t,B)=\sum_{n=0}^{4}\sum_{k=0}^{2n}c_n\frac{(2n)!(-1)^k}{(2n-k)!}B^k t^{2n-k}$$

以及

$$c_0=1,\quad c_1=2e,\quad c_2=2d+e$$

当 $B=0$ 时，有

$$p(r,0,t)=A\left[4e+12(2d+e^2)t^2+60edt^4+56d^2t^6\right] \tag{9.5.38}$$

(4) 当 $NT\leqslant t\leqslant NT+\frac{T}{4}$ 时，有

$$\begin{aligned}p(r,\vartheta,t)=&\frac{2B^2\omega_0^2a^2A}{1+4B^2\omega_0^2}\left[\delta_B'\left(t+NT+\frac{T}{4}\right)-\cos 2\omega_0 t\right.\\&\left.-2B\omega_0\sin 2\omega_0 t\right]+\frac{a^2A}{2}\left[1+\frac{1}{1+4B^2\omega_0^2}\right]\\&\times\left[\delta_B'(t-NT)-\delta_B'(t+NT)\right]\end{aligned} \tag{9.5.39}$$

如果 $B=0$，则有

$$p(r,0,t)=-2\omega_0^2A\cos 2\omega_0 t \tag{9.5.40}$$

(5) 当 $t\geqslant NT+\frac{T}{4}$ 时，有

$$\begin{aligned}p(r,\vartheta,t)=&\frac{a^2A}{2}\left(1+\frac{1}{1+4B^2\omega_0^2}\right)\left[\delta_B'(t-NT)-\delta_B'(t+NT)\right]\\&+\frac{2B^2\omega_0^2a^2A}{1+4B^2\omega_0^2}\left[\delta_B'\left(t+NT+\frac{T}{4}\right)-\delta_B'\left(t-NT-\frac{T}{4}\right)\right]\end{aligned} \tag{9.5.41}$$

如果 $B=0$，则有

$$p(r,0,t)=2Aa^2\omega_0^2D\left(t-NT-\frac{T}{4}\right) \tag{9.5.42}$$

根据情况(1)~(5)可以作出第二类包迹信号的参量波形的图示(图 9.12)，由图示可见，这种参量波形与高斯包迹的参量波形的区别是在两侧多了两个 N 形脉冲。理论上预见的上述诸波形在实验上都能看到。

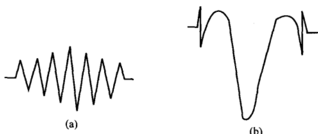


图 9.12　具有正弦填充的第二类包迹信号及其参量波形

(a)原波；(b)参量波

现在我们来研究上述两类包迹的频谱，为简单起见，我们只讨论其轴上的频谱，它等于轴上声压的傅里叶积分，即

$$G(\omega,0,r)=\int_{-\infty}^{\infty}p(r,0,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{9.5.43}$$

对于第一类包迹信号，其谱函数用 $G_1(\omega,0,r)$ 表示，通过计算可得

$$G_1(\omega,0,r)=\frac{8A\omega_0^2}{4\omega_0^2-\omega^2}\omega\cos\left(\frac{\omega T}{8}\right)\sin\left[\left(N+\frac{1}{8}\right)\omega T\right] \tag{9.5.44}$$

通常，$\frac{\omega T}{8}<<1$，故 $\cos\left(\frac{\omega T}{8}\right)\approx 1$，如果原波脉冲列的重复频率为 F_0，显然有 $\left(2N+\frac{1}{2}\right)T=\frac{x}{F_0}$，$x$ 是脉冲占空比，于是

$$G_1(\omega,0,r)\approx 2A\sin\left(\frac{\omega x}{2F_0}-\frac{\pi\omega}{4\omega_0}\right) \tag{9.5.45}$$

即 G_1 是 x 的周期函数，设对应于谱极大处之占空比为 x_m，谱极小处之占空比为 x_0 于是有

$$x_m=\left(\frac{2n+1}{2}+\frac{f}{4f_0}\right)\frac{F_0}{f},\quad x_0=\left(n+\frac{f}{4f_0}\right)\frac{F_0}{f} \tag{9.5.46}$$

因为所有$x<1$，以及差频与原频之比f/f_0很小，(9.5.46)式表明，如$f \geqslant mF_0$，则极大点的个数$n_m \leqslant m$，极小点的个数$n_0<m$，对于第二类包迹可以得到类似的结果。实验结果支持了上述理论(图 9.13)。由此可见，选择适当的占空比，可以得到较高的参量声压级。

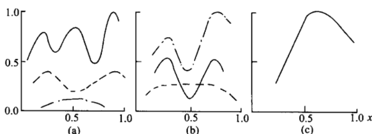


图 9.13　参量声压与脉冲占空比的关系(实验)

f_0=410kHz;
- - - - - 滤波低通频率为 40kHz
—— 滤波中心频率为 20kHz
- - - - - 滤波中心频率为 12.5kHz
—·— 滤波低通频率为 6.3kH
(a)F_0=6.7kHz;(b)F_0=12.5kHz;(c)F_0=24kHz
带宽为 1 倍频率

结　束　语

理论和实验都表明将原频功率转换成参量声的效率是很低的，因此有不少工作力求提高它的效率，但是收效不大，这似乎对它的实际应用产生影响。但是由于参量声源的小尺寸和窄波束，其指向性增益较大，加之其频带可以做得很宽，从而可以获得较高的信号处理增益，由此可见，这些优良性能是以低效率为代价的，或者说，人们应该全面衡量参量阵的得与失，特别是在某些应用场合参量声源有其独到之处，因此不必去片面追求其效率的高低。

参 考 文 献

[1] Westervelt P J. Parametric acoustic array. Jour Acoust Soc Am, 1963, 35: 535~537

[2] Westervelt P J. The status and future of nonlinear acoustics (and applications). Jour Acoust Soc Am, 1975, Part 1, 57: 1352~1356.

[3] Berktay H O. Possible exploitation of non-linear acoustics in underwater transmitting applications. J Sound and Vib, 1965, 2: 435~461

[4] Berktay H O, Leahy D J. Farfield performance of parametric transmitters. Jour Acoust Soc Am, 1974, 55:539~546

[5] Bellin J L S, Beyer R T. Experimental investigation of an end-fire array. Jour Acoust Soc Am,

1962, 34:1051~1054
[6] Bjorno L. Some experimental investigation of the parametric acoustic array. Acoustica, 1976, 35: 99~106
[7] Pace N G, Ceen R V. A coustic signals in marine sediments due to water-borne parametric array. Proc Conf Underwater Applications of Nonlinear Acoustics, Univ Bath, 1979. 1~3
[8] Pace N G, Ceen R V. Time domain study of the terminated transient parametric array. Jour Acoust Soc Am, 1983, 73: 1972~1978
[9] Eller A I. Application of the USRD type E8 transducer as an acoustic parametric source. Jour Acoust Soc Am, 1974, 56: 1735~1739
[10] Muir T G, et al. Parametric acoustic transmitting arrays. Jour Acoust Soc Am, 1972, 52: 1481~1486
[11] Rolleigh R I. Difference frequency pressure within the interaction region of a parametric array. Jour Acoust Soc Am, 1975, 58: 964~971
[12] Merklinger H M. Improved efficiency in the parametric transmitting array. Jour Acoust Soc Am, 1975, 58: 784~787
[13] 钱祖文. 计算线源参量阵的新方法. 物理学报, 1981, 30：1479~1486
[14] 钱祖文. 关于参量阵近场. 物理学报, 1981, 30：1559~1561
[15] 钱祖文, 邵道远. 关于浅海参量阵的应用. 物理学报, 1986, 35：1374~1377
[16] Moffett M B, Mellen H, Konrad W L. Parametric acoustic source of rectangular aperture. Jour Acoust Soc Am, 1978, 63: 1326~1331
[17] Moffett M B, Mellen H, Konrad W L. Model for parametric acoustic source. Jour Acoust Soc Am, 1977, 61: 325~337
[18] Moffett M B, Mellen H, Konrad W L. On parametric parametric source aperture factor. Jour Acoust Soc Am, 1976, 60: 581~583
[19] Moffett M B, Westervelt P J, Beyer R T. Large-amplitude pulse propagation-a transient effect. II. Jour Acoust Soc Am, 1971, 49: 339~343
[20] Clynch J R. Optimal primary spectra for parametric transmitting arrays Jour Acoust Soc Am, 1975, 58: 1127~1132
[21] 邵道远, 钱祖文. 宽带参量阵的实验研究. 声学学报, 1988, 13：279~283
[22] 钱祖文. 宽带参量阵的研究(1)脉冲自解调问题的非轴向场. 声学学报, 1988, 13：119~123
[23] 钱祖文. 宽带参量阵的研究(2)远波信号包迹的影响. 声学学报, 1988, 13：271~278
[24] Qian Z W, Shao D Y. Parametric waveforms and spectra of the primary pulse with two kinds of envelops. Chinese Phys Lett, 1986, 3: 417~420

第 10 章 参量接收器

第 9 章我们讨论了参量发射阵，由换能器发射两个传播方向相同但频率不同的声波(或者发射一个带通信号)，这些声波通过介质的非线性相互作用，在相互作用区产生了新的辐射源，从而在空间产生辐射场，也就是说，参量阵的辐射场是相互作用区的辐射源所产生的辐射场的总和。

正如文献[1]指出，这个原理可以用来作为声波的接收器，即所谓参量接收器。这种接收器是用一个高频换能器发射一个强声波(称为泵波)，使它与被接收的信号产生相互作用，并在泵波换能器的声轴上放置一个接收换能器，后者除了接收到频率成分为 f_0 的泵波以外，还会接收到两个边带调制成分的波，其频率分别为 f_0+f 和 f_0-f，其中 f 是被测信号的频率。通常由于泵波很强，而频率为 $f_0\pm f$ 的信号是很弱的相互作用成分的声波，但其中都含有信号信息，所以参量接收器是在强的泵波背景上检测频率为 $f_0\pm f$ 的和差频弱信号参量声波，通过这个装置希望获得较高的指向性增益和接收灵敏度。显然，参量接收器的性能与泵波的性质很有关系，为此，我们将分别讨论平面泵波和球面泵波的情况，进一步讨论用一组参量接收器组成的阵。

值得一提的是，在非频散介质中，根据韦斯特维尔特理论可知，两个平面波的相互作用产生的声波(前面有时称为组合波)由局部场和辐射场两部分组成，前者是达朗贝尔源函数产生的，后者仅在两平面波的传播方向的夹角 ϑ_0 为零时才出现。另外，由 8.3 节可知，当 $\vartheta_0=0$ 时，组合波的场是有积累性的，这种情况下的源函数即为参量发射器的源函数 q；当 $\vartheta_0\neq 0$ 时，组合波的场是非积累性。由此可见，只要两个一阶波传播方向不同时，在公共区内外都没有积累性的组合波。但作为接收器，其 ϑ_0 由有限值变化到零，解函数有一个跃变(见 8.3 节)，也许会使得参量接收器有较好的指向性。另外，由于源函数在 $\vartheta_0=0$ 时有跃变，因此，在计算参量接收器的声学特性时并不存在一个统一的源函数，但以往的理论却用了一个连续变化的源函数表达式，这似乎与声散射声的结果冲突，下面的介绍只是假设存在一个连续的源函数，尽管作者未必同意这一假设。

10.1 准直束泵波参量接收器[2~4]

众所周知，一个理想的准直束是不存在的，因为任何实际换能器所产生的声场都要满足波动方程。但当换能器的尺寸比波长大得多时，在它的瑞利距离以内，

其声场可以近似地当作平面波准直束，而远场可以当作球面波束，本节我们讨论前一种泵波。对于被接收的信号波来说，因为它来自远处，故在参量接收器相互作用区所占有范围内，可以近似地把它当作平面波。

图 10.1 表示一个准直束泵波参量接收器，接收水听器处在泵波换能器近场的对称轴上，如果坐标 x 从泵换能器的中心算起，则泵波可表示为

$$p_1 = P_1 e^{-\alpha_1 x} \cos[\omega_1 t - k_1 x] \tag{10.1.1}$$

式中，α_1, ω_1 和 k_1 分别为泵波的吸收系数、角频率和波数。如果被接收的信号可以当作平面波，其传播方向与泵轴成 ϑ 角，于是它可表示为

$$p_2 = P_2 \mathrm{e}^{-\alpha_2(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)} \cos[\omega_2 t - k_2(x\cos\vartheta + y\sin\vartheta)] \tag{10.1.2}$$

式中，α_2 为信号波的吸收系数，其他物理量完全可以从(10.1.1)式进行一一对应。

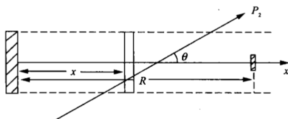


图 10.1 参量接收器的示意图

当 $\vartheta \neq 0$ 时，假设韦斯特维尔特源函数密度的表达式可以推广为

$$q(x,y,z;t) = -\frac{\omega_s P_1 P_2(\cos\vartheta + \gamma)}{\rho_0^2 C_0^4} \times \mathrm{e}^{-(\alpha_1 + \alpha_2\cos\vartheta)x} \sin[\omega_s t - (k_1 \pm k_2\cos\vartheta)x \mp k_2 \sin\vartheta \cdot y] \tag{10.1.3}$$

式中，$\omega_s = |\omega_1 \pm \omega_2|$，这个结果可以从第 9 章中的韦斯特维尔特理论推演出来，式中的“±”号表示和差频，$\gamma = \frac{1}{2}\rho_0 C_0^{-2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2}\right)_0 = \frac{B}{2A}$。

因为泵波是准直束，故相互作用区横截面的形状与泵换能器相同，将这个区域分成很多厚度为 δx 的薄层，接收水听器放在泵波的轴上，距离泵波换能器中心为 R。将每个薄层当作具有无限刚性障板的平面辐射器，根据熟知弗里德曼(Freedman)理论，上述平面辐射器的近场 R 点的声压可以表示为

$$\delta p = \frac{\rho_0 C_0}{2} \mathrm{e}^{-\alpha_s (R-x)} \cdot q\left(t - \frac{R-x}{C_0}\right)\delta x \tag{10.1.4}$$

如果认为

$$\delta \rho = \rho_0 C_0 \, \mathrm{e}^{-\alpha_s (R-x)} \, \delta u$$

对比(10.1.4)式可知

$$\delta u = \frac{1}{2} q\left(t - \frac{R-x}{C_0}\right)\delta x$$

若将上式乘以面积s，容易看出，流动的体积速度等于参量源密度的一半，对此，不妨从形式上来理解这一点：由于全空间流动，半空间辐射，会产生这个1/2因子。这并不是解释，只不过为了帮助记忆而已。

将(10.1.3)式代入上式，对x进行积分，可得

$$p(R,\vartheta,t) = -\mathrm{e}^{-\alpha_s R} \cdot \frac{\omega_s P_1 P_2 (\cos\vartheta + \gamma)}{2\rho_0 C_0^3} \int_0^R \mathrm{e}^{-(\alpha_1 + \alpha_2 \cos\vartheta - \alpha)x}$$

$$\times \sin\left[\omega_s t - KR - (k_1 \pm k_2 \cos\vartheta - K)x\right] \mathrm{d}x$$

如果$\omega_1 \gg \omega_2$，$|(\alpha_1 + \alpha_2 \cos\vartheta - \alpha_s)R| \ll 1$，则上式可写成

$$p(R,\vartheta,t) = -\frac{\omega_s P_1 P_2 (\cos\vartheta + \gamma)}{2\rho_0 C^3{}_0} \mathrm{e}^{-\alpha_s R}$$

$$\times R \sin\left(\omega_s t - KR + \frac{1}{2}\beta_1 R\right) \frac{\sin(\beta_1 R/2)}{(\beta_1 R/2)} \tag{10.1.5}$$

式中

$$\beta_1 = k_1 \pm k_2 \cos\vartheta - K = \mp k_2 (1 - \cos\vartheta) \tag{10.1.6}$$

这个结果是通过分部积分、应用上述近似、假设$|a_1 + a_2 \cos\vartheta - a_s|/|\beta_1| << 1$等条件求得的。另外，由于将泵波当作平面波，于是上面的结果只在$R < R_0$时成立，其中R_0是泵波换能器的瑞利距离。(10.1.5)式表明，参量接收器的指向性因子

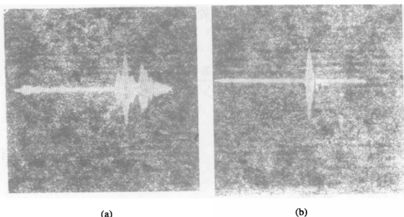
$$D(\vartheta) = \frac{\sin(\beta_1 R/2)}{(\beta_1 R/2)} \tag{10.1.7}$$

主瓣的最大半张角(即从最大到零时的张角)为

$$\vartheta_B = \sqrt{\frac{4\pi}{k_2 R}} \tag{10.1.8}$$

由此可见，主瓣的 ϑ_B 只与被测信号的频率有关。另外，参量接收指向性图有旁瓣。

图 10.2 是在实验室用参量接收器抑制多径干扰的例子。图 10.2(a)是用通常水听器接收的信号，其中多途径效应很明显；图 10.2(b)是用参量接收器接收的信号，从图 10.2 中可以看出，多径干扰完全被抑制。



(a)　　(b)

图 10.2　参量接收器抑制多径干扰

(a)通常水听器接收的信号;(b)参量接收器接收的信号

10.2　球面泵波参量接收器[5, 6]

仍假设信号来自远方，并认为，在参量接收的长度内，它是平面波，而泵波是球面扩展波，它可表示为

$$p_1 = \mathrm{j}\frac{P_1}{r} D(\psi) \mathrm{e}^{-(\alpha_1 + \mathrm{j}k_1) r} \tag{10.2.1}$$

信号波为

$$p_2 = P_2 \mathrm{e}^{-(\alpha_2 + \mathrm{j}k_2) R} \tag{10.2.2}$$

故在 (r,ψ) 点的源密度为

$$q(r,\psi)=-\frac{\omega_s\beta}{\rho_0^2C_0^4}\frac{P_1P_2}{r}D(\psi)\mathrm{e}^{-(\alpha_1r+\alpha_2R)-\mathrm{j}(k_1r\pm k_2R)} \tag{10.2.3}$$

式中，β 近似地等于介质的非线性系数(即认为 $\cos\vartheta+\gamma\approx1+\gamma$)，$r$ 是从泵波换能器中心算起的场点矢径，ψ 是该矢径与泵轴的夹角，其余的几何量见图 10.3。

设接收水听器在泵轴上，故 $D(\psi)\approx1$，于是

$$q(r,\psi)=q(r)$$

式中，$q(r)$ 为 $(r,0)$ 点的源强密度，不计及参量声源的反向辐射，仍属于全空间流动半空间辐射，故成厚为 δr 的球壳中 r 处的流点速度为

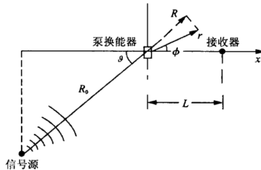


图 10.3 球面泵波参量接收器

$$\delta u_L=\frac{1}{2}q(r)\delta r \tag{10.2.4}$$

由于 $\omega_1>>\omega_2$，和差频波仍近似按球面传播，于是在泵轴上任一点 $(L,0)$ 处的质点速度为

$$\delta u_L=\frac{r}{L}\delta u_r\,\mathrm{e}^{-(\alpha_s+\mathrm{j}k)(L-r)}$$

对 r 求积分得到

$$u(L,\vartheta)=\frac{1}{2L}\mathrm{e}^{-(a_s+K)L}\int_0^L q(r)\cdot\mathrm{e}^{(a_s+K)r}\cdot r\,\mathrm{d}r \tag{10.2.5}$$

其中忽略了参量源的反向辐射，即忽略了 L 到 ∞ 的积分。将 $q(r)$ 代入(10.2.5)式，由于 $R=r\cos\vartheta$，应用质点速度与压力的关系可得

$$p(L,\vartheta)=-\frac{\omega_s\beta P_1P_2}{2\rho_0C_0^3L}\mathrm{e}^{-(a_s+K)L}$$

$$\times\int_0^L \mathrm{e}^{-[(\alpha_1+\alpha_2\cos\vartheta-\alpha_s)\mp \mathrm{j}k_2(1-\cos\vartheta)]r}\,\mathrm{d}r \tag{10.2.6}$$

为了求得上式的积分，采用在计算(10.1.5)式时所应用的近似，容易得到

$$p(L,\vartheta)=-\frac{\omega_s\beta P_1P_2}{2\rho_0C_0^3}\exp\{-(\alpha_s+\mathrm{j}K)L$$

$$\mp \mathrm{j}k_2(1-\cos\vartheta)/2\}\frac{\sin k_2L(1-\cos\vartheta)/2}{k_2L(1-\cos\vartheta)/2} \tag{10.2.7}$$

将(10.2.7)式与(10.1.5)式比较可知，两种泵波的参量接收器上压力表达式的差别是：在准直束泵波的情况下，尽可能地增大泵换能器与接收水听器之间的距离，以便能够得到较大的轴上声压；而球面泵波参量接收器轴上声压与距离无关。

10.3　参量接收器阵[7]

10.1 节和 10.2 节讨论了平面泵波和球面泵波的参量接收器，它们的指向性因子都是

$$D(\vartheta)=\frac{\sin\left[k_2L(1-\cos\vartheta)/2\right]}{k_2L(1-\cos\vartheta)/2} \tag{10.3.1}$$

它所对应的 3dB 波束全束宽可表示为

$$\vartheta_d=4\arcsin\left[0.470\left(\frac{\lambda_2}{L}\right)^{1/2}\right] \tag{10.3.2}$$

式中，λ_2 为信号波长。对于一个 5kHz 的信号，要求波束全宽度为 6° 时，则参量接收器的长度 L 约为 97.8m。由于 ϑ_d 与 $\frac{\lambda_2}{L}$ 的关系近似是平方根的，因此用增大阵长来提高阵的指向性不是一种有效的途径。为此，提出参量接收器阵的设想是很自然的。

如果用参量接收器作为阵元，则参量接收器阵的指向性函数为

$$D_T(\vartheta)=D(\vartheta)D_B(\vartheta) \tag{10.3.3}$$

式中，$D(\vartheta)$ 如(10.3.1)式所示是单个参量接收器的指向性函数，$D_B(\vartheta)$ 为 N 个性能相同的无指向性阵元组成的阵的指向性函数，如果相邻元的距离为 d，则

$$D_B(\vartheta)=\frac{\sin\left[\frac{1}{2}Nk_2 d\sin\vartheta\right]}{N\sin\left(\frac{1}{2}k_2 d\sin\vartheta\right)} \tag{10.3.4}$$

其中假设所有阵元上的泵波相位相同，因而相邻元的相位差为 $k_2 d\sin\vartheta$。

应用乘积公式可以计算上面的例子，如用四元阵代替长为 97.8m 的参量接收器，前者的面积仅为 1.82m×5.79m，这样用一个矩形阵来代替一个很长的阵给实际使用带来方便。

10.4 行波参量放大[8~12]

以上讨论的参量接收器是根据韦斯特维尔特参量阵理论进行计算的，本节将从另一个角度来讨论这个问题。

从(4.1.13)式出发，将全部变量进行一次量纲为一变换，即设

$$V=\frac{u}{u_0},\quad \sigma=\left(\frac{\beta\omega u_0}{C_0^2}\right)x$$

$$\vartheta=\omega\tau,\quad \Gamma=\left[2\beta\frac{\rho_0 C_0 u_0}{b\omega}\right]^{-1} \tag{10.4.1}$$

于是(4.1.13)式成为

$$\frac{\partial V}{\partial\sigma}-V\frac{\partial V}{\partial\vartheta}=\Gamma\frac{\partial^2 V}{\partial\vartheta^2} \tag{10.4.2}$$

为归一化伯格斯方程，式中 β 为介质非线性系数，b 为黏热系数，u 为质点速度，u_0 是它的幅值，σ 称为以冲击波形成距离为单位的归一化距离，显然，(10.4.2)式是无频散效应的方程。

为了讨论参量接收或者参量放大问题，假设泵波是平面波，其频率为 ω，本节只讨论一种特殊情况的参量接收，即假设被接收的信号频率为 $\omega/2$，并且边界条件为

$$V(0,\vartheta)=\sin\vartheta+V_1(0)\sin\left(\frac{\vartheta}{2}+\varphi\right) \tag{10.4.3}$$

根据能量守恒可知，3 个波相互作用时必须满足

$$\omega_1 \pm \omega_2 = \omega_3$$

如果 ω_1 和 ω_2 分别为泵波和信号波，则 ω_3 为参量波，于是差频波的频率也是 $\omega/2$ 。对照(10.4.3)式可知, (10.4.2)式的解应写为

$$V(\sigma,\vartheta) = \sin\vartheta + V_1(\sigma)\sin\left[\frac{\vartheta}{2} + s(\sigma)\right] \tag{10.4.4}$$

$V_1(\sigma), s(\sigma)$ 是待定函数，而且 $V_1(0) << 1$ 。将上式代入(10.4.2)式可以得到两个微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}\sigma} + \frac{\Gamma}{4}V_1 = -\frac{V_1}{4}\cos 2s(\sigma) \tag{10.4.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,s(\sigma)}{\mathrm{d}\,\sigma} = \frac{1}{4}\sin 2s(\sigma) \tag{10.4.6}$$

显然, (10.4.5)式的解为

$$V_1(\sigma) = V_1(0)\exp\left\{-\frac{1}{4}\int_0^{\sigma}\left[1+\cos 2s(\sigma)\right]\mathrm{d}\sigma\right\} \tag{10.4.7}$$

而(10.4.6)式的积分为

$$\cot s(\sigma) = \cot\phi \cdot \mathrm{e}^{\sigma/2} \tag{10.4.8}$$

从这二个式子可见，当 $\phi = \pi/2$, $s(\sigma) = \pi/2$ 时，有

$$V_1(\sigma) = V_1(0)\mathrm{e}^{\frac{1}{4}(1-\Gamma)\sigma} \tag{10.4.9}$$

只要 $\Gamma < 1$，随着 σ 的增大，$V_1(\sigma)$ 就有放大。由此可见，信号波的初始相位 ϕ 对参量接收的性能影响很大。

鲁旦科(Руденко)和芬伦曾经用伯格斯方程来解决多频波相互作用问题，鲁旦科从理论上预见到参量接收器的性能对被接收信号的初始相位依赖很大，几个实验证实了这些理论结果。图 10.4 是行波参量放大的实验装置图，图中的两路分别为泵波和信号波，后者的频率为前者的一半，是由分频器产生的。两个波经各自的功率放大器加到发射换能器上，再注入长管中。为保证行波，管的远端放置了吸声材料。信号由接收换能器接收，通过滤波器或频谱分析器滤出有用的信号。测量结果与理论定量符合。

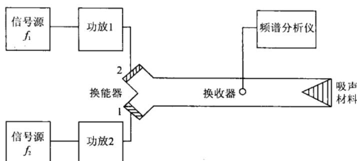


图 10.4　行波参量放大实验装置图

上面介绍了关于声参量接收器的两种理论。第一种是伯克泰理论，他将参量阵的源函数用一个连续变化的表达式来表示，从而算出各种泵波所产生的参量接收器的指向性。由 8.3 节内容可知，对于平面波来说，两个原波(一个是泵波，另一个是信号波)传播方向的夹角 ϑ_0 是否为零与源函数密切相关，即源函数在 $\vartheta_0=0$ 附近有间断，致使参量接收器不存在一个连续变化的源函数，因而产生的组合波场也在 $\vartheta_0=0$ 附近有一个跳跃。例如，当 $\vartheta_0\neq 0$ 时，组合波如(8.3.29)式所示；当 $\vartheta_0=0$ 时，组合波场是如(8.3.31)式所表示的，显然，这时如何定义指向性值得注意。场对 ϑ_0 的导数在 $\vartheta_0=0$ 两侧是无限大，当然，由于无限平面波实际难以实现，故这种无限大现象通常不会出现。

另一个理论是由伯格斯方程出发，讨论 $\vartheta_0=0$ 时的参量放大行波理论，这里只讨论了泵波频率是信号频率的二倍的特殊情形，显然，由于只讨论了 $\vartheta_0=0$ 的情形，故只是一种行波放大器，而不是接收器(它不能研究指向特性)。

参考文献

[1] Westervelt P J. Parametric acoustic array. Jour Acoust Soc Am, 1963, 35: 535~537

[2] Berktay H O. Parametric amplification by the use of acoustic non-linearities and some possible applications, J Sound and Vib, 1965, 2: 462~470

[3] Berktay H O. Virtual arrays for underwater reception. J Sound and Vib , 1969, 9: 295~300

[4] Barnard G R, et al. Parametric acoustic receiving Array. Jour Acoust Soc Am, 1972, 52: 1437~1441

[5] Berktay H O, Shooter J A. Parametric receivers with spherically spreading pump. Jour Acoust Soc Am, 1974, 54: 1056~1061

[6] Truchard J J. Parametric acoustic receiving array: I. theory. Jour Acoust Soc Am, 1975, 58: 1141~1145

[7] Berktay H O, Muir T G. Arrays of parametric receiving elements. Jour Acoust Soc Am, 1973, 53: 1377~1383

[8] Rudenko O V, Soluyan S I. Theoretical foundations of nonlinear acoustics. New York:

Consultants Bureau,1977

[9] Fenlon F H. A recursive procedure for computing the nonlinear spectral interactions of progressive finite-amplitude waves in nondispersive fluids. Jour Acoust Soc Am, 1971, 50: 1299~1312

[10] Fenlon F H. An extension of the Bessel-Fubini series for a multiple-frequency CW acoustic source of finite amplitude. Jour Acoust Soc Am, 1972, 51: 284~289

[11] 杜功焕, 龚秀芬, 朱哲民. 有限振幅无规声波(噪声)非线性相互作用理论. 声学学报, 1982, 7: 1~7

[12] 杜功焕, 龚秀芬. 在强无规噪声场中有规声能量的抑制. 声学学报, 1984, 9: 129~133

[13] 龚秀芬, 朱哲民, 杜功焕. 有限振幅与小振幅平面声波的非线性相互作用研究. 南京大学学报(自然科学版), 1979, (3): 19

第 11 章　声 辐 射 力

实际声场中的物体会受到一个量值不为零的时间平均声压力。根据线性声学原理可知，一列正弦波在介质中传播时，物体上承受到声场的周期力作用，显然它的平均值为零。但由于声学过程不是线性的，因此声场中的物体受到不等于零的平均压力的作用，如在高声强声场中的传声器的膜片上就会测到非零的时间平均压力。要想弄清这类现象的内在原因，必须借助于非线性声学理论。

远在十八九世纪人们就曾注意到辐射力的现象[1]，而理论解释则是在 20 世纪初由瑞利、朗之万等着手开创的。在理想流体中，瑞利处理了平面波经过刚性板反射后，板上受到的辐射力。以后很多学者不断从事研究，按所得到的理论结果可以将这方面的工作者大致分成两部分：一部分以瑞利为首，包括后来的富比尼、韦斯特维尔特、拜尔以及朱(Chu)和阿普弗尔(Apfel)等；另一部分是以朗之万、布里渊为首，包括赫兹(Hertz)和门德(Mende)、鲁尼(Rooney)和奈伯格(Nyborg)以及斯塔珀(Stapper)等。在通常的意义下，压力是一个各向同性的量，下面也可以看到，在欧拉体系中，辐射力中既包括各向同性的部分，还包括各向异性(二级张量)的部分，这也许是近年来的文献中往往将这个力称为辐射力的原因。由第 1 章知识我们已经知道，在流体力学的两个体系，即拉格朗日体系和欧拉体系中，二阶量是有差别的，因此，下面先讨论几个物理量在两个体系中的转换关系。

11.1　拉格朗日量和欧拉量之间关系的进一步讨论[2, 3]

正如在第 1 章中曾提到的，连续介质力学存在两种体系：一种称为拉格朗日体系；另一种称作欧拉体系。前者是以各个流点在初始时刻 t_0 在空间占有的位置 (a,b,c) 作为坐标变量，并用这组变量来区别不同的流点，在该坐标系中，一切物理量的测量就像将测量设备放置在与流点一起运动的坐标系上，对与流点有关的物理量作跟踪测量，更明确地说，流点运动到什么地方，测量仪器就测什么地方的物理量。在 $t=t_0$ 时，某流点的坐标为 (a,b,c)，于是这时测出的某物理量为 $q^{\mathrm{L}}(a,b,c;t_0)$，到了 $t=t$ 的时刻该流点运动到新的位置，并相对于它的初始位置作了一个位移，它们可写为 $\xi(a,b,c;t),\eta(a,b,c;t),\zeta(a,b,c;t)$，于是与该流点相联系的某物理量就成为 $q^{\mathrm{L}}(a,b,c;t)$。

在欧拉系中选取固定空间的坐标量 (x, y, z) 作为变量，测量装置则是放在这个

固定坐标系中进行测量任一物理量，它不跟踪任何流点，在 t 时刻的空间 (x,y,z) 点测得的某物理量为 $q^{\mathrm{E}}(x,y,z;t)$。

为了导出 q^{E} 与 q^{L} 之间的关系，利用两组坐标变量之间的关系

$$\left.\begin{aligned} x &= a+\xi(a,b,c;t) \\ y &= b+\eta(a,b,c;t) \\ z &= c+\zeta(a,b,c;t) \end{aligned}\right\} \tag{11.1.1}$$

上式表明，在 t 时刻流点 (a,b,c) 的位置处于点 (x,y,z)。由此可见，在 (x,y,z) 空间点测得的某物理量 $q^{\mathrm{E}}(x,y,z;t)=q^{\mathrm{E}}(a+\xi,b+\eta,c+\varsigma,t)$ 应该就是在 t 时刻跟踪流点时测得的同一个物理量 $q^{\mathrm{L}}(a,b,c;t)$，即

$$q^{\mathrm{E}}(x,y,z;t)=q^{\mathrm{L}}(a,b,c;t)$$

通过泰勒展开可以求出它们之间的联系，为表示简单起见，下面只讨论一维问题。由于在一维情况下 $q^{\mathrm{E}}(x,t)=q^{\mathrm{L}}(a,t)$，以及 $x=a+\xi(a,t)$，于是有

$$\begin{aligned} q^{\mathrm{L}}(a,t) &= q^{\mathrm{E}}(x,t)\Big|_{x=a+\xi(a,t)}=q^{\mathrm{E}}(a,t) \\ &\quad +\left.\frac{\partial q^{E}(x,t)}{\partial x}\right|_{x=a}\xi(a,t)+\cdots \end{aligned} \tag{11.1.2}$$

以及

$$q^{\mathrm{E}}(x,t)=q^{\mathrm{L}}(x-\xi,t)=q^{\mathrm{L}}(x,t)-\left.\frac{\partial q^{\mathrm{L}}(x,t)}{\partial a}\right|_{a=z}\times\xi(x,t)+\cdots \tag{11.1.3}$$

根据这两组关系可以求出各个物理量在不同体系中的表示式，下面的讨论仅限于二级近似。

由第 1 章可知，在拉格朗日体系中，密度和质点速度的表示式分别为

$$\rho^{\mathrm{L}}=\frac{\rho_0}{1+\xi_a},\quad u^{\mathrm{L}}=\xi_t \tag{11.1.4}$$

式中，ξ_a,ξ_t 分别为位移 ξ 对 a 及 t 的导数。如果要将它们变换到欧拉体系中去，利用(11.1.3)式可得

$$\rho^{\mathrm{E}}=\rho_0\left[1-\xi_x+(\xi_x)^2+\xi\xi_{xx}\right] \tag{11.1.5}$$

以及

$$u^{\mathrm{E}}=\xi_t-\xi_{xt}\xi \tag{11.1.6}$$

同理，局部声速C^{E}及动量密度$\rho^{\mathrm{E}}u^{\mathrm{E}}$为

$$\begin{aligned}C^{\mathrm{E}}=C_0\Bigg\{&1+\rho_0C_0^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0\left[-\xi_x+\xi_x^2+\xi\xi_{xx}\right]\\&+\frac{1}{2}\rho_0^2C_0^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}\rho_2}\right)_0\xi_x^2\Bigg\}\end{aligned} \tag{11.1.7}$$

$$\rho^{\mathrm{E}}u^{\mathrm{E}}=\rho_0(\xi_t-\xi\xi_{xt}-\xi_x\xi_t) \tag{11.1.8}$$

我们将利用这些关系式从欧拉体系下的方程组导出拉格朗日体系下的波动方程。为书写方便起见，将暂时省去欧拉量的上标 E。由欧拉系中的连续性方程和运动方程可知

$$\left.\begin{aligned}\rho_t+(\rho u)_x=0\\(\rho u)_t+(\rho u^2)_x=-C^2\rho_x\end{aligned}\right\} \tag{11.1.9}$$

式中，所有的量均为欧拉量，为了化成拉格朗日体系下的波动方程，必须将它们用拉格朗日量来表示，即利用(11.1. 5)式~(11.1.7)式来表示ρ,u及 C，代入(11.1.9)式可得

$$\begin{aligned}&\rho_0(\xi_{tt}-\xi_t\xi_{xt}-\xi\xi_{xtt}-\xi_{xt}\xi_t-\xi_x\xi_{tt})+2\rho_0\xi_t\xi_{xt}\\&=-\rho_0C_0^2(-\xi_{xx}+2\xi_x\xi_{xx}+\xi_x\xi_{xx}+\xi\xi_{xxx})-2\rho_0^2C_0\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0\xi_x\xi_{xx}\end{aligned}$$

重新整理之后可得

$$\xi_{tt}=C_0^2\left\{1-2\left[1+\frac{\rho_0}{C_0}\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0\right]\xi_x\right\}\xi_{xx}+\left\{\left[\xi_x+\xi\frac{\partial}{\partial x}\right]\left[\xi_{tt}-C_0^2\xi_{xx}\right]\right\} \tag{11.1.10}$$

容易证明，上式右端第二项至少是三阶项，故在二级近似下有

$$\xi_{tt}-C_0^2\xi_{xx}=-C_0^2\left[1+\frac{\rho_0}{C_0}\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0\right](\xi_x^2)_x \tag{11.1.11}$$

这个式子即为第2章开始部分得到的结果，其正式表示式如(7.1.2)式所示，不过在第2章是在拉格朗日体系下导出的，而本章是从欧拉方程组通过转换关系导得的。

11.2 艾里-富比尼(积累)解[4, 5]

为了求得瑞利辐射压力，富比尼应用艾里逐步近似法求解(11.1.11)式的边值和初值问题。为了求解这一问题，他用一个作正弦式运动的活塞声源，限定该活塞在$t=0$时的位移和速度都为零，即它的振动可描述为

$$f(t)=\xi_0(1-\cos\omega t) \tag{11.2.1}$$

显然，当$t=0$时，$f(0)=f'(0)=0$，上述要求是满足的。应用艾里的逐步近似法，首先是令(11.1.11)式右端为零，亦即是说，先解齐次波动方程从而求得第一级近似解$\xi^{(1)}$，亦即是求解

$$\frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial t^2}-C_0^2\frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial x^2}=0 \tag{11.2.2}$$

要求解满足边值条件

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\xi^{(1)}=0\\ \dfrac{\partial\xi^{(1)}}{\partial t}=0\end{array}\right\},\quad t=0,\quad x>0\\ \xi^{(1)}=f(t),\quad x=0,\quad t>0\end{array}\right\} \tag{11.2.3}$$

满足(11.2.2)式的达朗贝尔解是

$$\xi^{(1)}(x,t)=f_1\left(t-\frac{x}{C}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{C}\right) \tag{11.2.4}$$

上述解还要满足(11.2.3)式，于是有

$$\left.\begin{array}{r}f_1(-X)+f_2(X)=0\\ f_1'(-X)+f_2'(X)=0\\ f_1(X)+f_2(X)=f(X)\end{array}\right\},\quad X>0$$

将上面的第二式进行一次积分，得到

$$f_1(-X)-f_2(X)=-C$$

C 为积分常数，将这个式子与另外的两个相组合，可以解出

$$\left.\begin{aligned} f_2(X)=\frac{C}{2},\quad f_1(-X)=-\frac{C}{2} \\ f_1(X)=f(X)-\frac{C}{2} \end{aligned}\right\},\quad X>0 \tag{11.2.5}$$

上式表明，只要宗量 $X>0$，上面的 3 个式子恒成立，于是有，如果 $t-\frac{x}{C_0}>0$，于是 $t+\frac{x}{C_0}>0$ 必有

$$f_2\left(t+\frac{x}{C_0}\right)=\frac{C}{2}$$

$$f_1\left(t-\frac{x}{C_0}\right)=f\left(t-\frac{x}{C_0}\right)-\frac{C}{2}$$

即

$$f_1\left(t-\frac{x}{C_0}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{C_0}\right)=f\left(t-\frac{x}{C_0}\right)$$

而上式的左端即为 $\xi^{(1)}(x,t)$，于是得到第一级近似解

$$\xi^{(1)}(x,t)=f\left(t-\frac{x}{C_0}\right),\quad t>\frac{x}{C_0}$$

另外由于 $t<\frac{x}{C_0}$ 无任何扰动，于是有

$$\xi^{(1)}(x,t)=\begin{cases} 0, & t<\dfrac{x}{C_0} \\ f\left(t-\dfrac{x}{C_0}\right), & t>\dfrac{x}{C_0} \end{cases} \tag{11.2.6}$$

将上式代入(11.1.11)式的右端，得到准确到二级近似的解所满足的波动方程

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-C_0^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}=-\beta\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[f'(t-\frac{x}{C_0})\right]^2\right\} \tag{11.2.7}$$

式中，β 为非线性系数。作变换

$$t-\frac{x}{C_0}=z, \qquad t+\frac{x}{C_0}=y \tag{11.2.8}$$

于是(11.2.7)式成为

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial z}=\frac{\beta}{4C_0}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\left[f'(z)\right]^2\right\}$$

积分可得

$$\xi(y,z)=\frac{\beta}{4C_0}y\left[f'(z)\right]^2+g_1(y)+g_2(z) \tag{11.2.9}$$

边界条件为

$$\text{当}x-C_0\,t=0\text{ 时,}\quad \xi(x,t)=0$$
$$\text{当}x=0\text{ 时,}\qquad \xi(x,t)=f(t)$$

将这些条件及 $f(t)$ 的表达式代入(11.2.9)式，最后可得

$$g_1(2t)+g_2(0)=0$$
$$g_1(t)+g_2(t)+\frac{\beta}{4C_0}t\left[f'(t)\right]^2=f(t)$$

上面的第一个式子表明, $g_1(t)=$ 常数。从第二个式子可得(省去一项常数)

$$g_2(t)=f(t)-\frac{\beta}{4C_0}t\left[f'(t)\right]^2$$

或者

$$g_2\left(t-\frac{x}{C_0}\right)=f\left(t-\frac{x}{C_0}\right)-\frac{\beta}{4C_0}\left(t-\frac{x}{C_0}\right)\left[f'\left(t-\frac{x}{C_0}\right)\right]^2$$

$$g_1(t)=g_1\left(t+\frac{x}{C_0}\right)=\text{常数} \tag{11.2.10}$$

将(11.2.1)式和(11.2.10)式代入(11.2.9)式得到

$$\begin{aligned}\xi(x,t)=\xi_0&\left\{1-\cos\omega\left(t-\frac{x}{C_0}\right)+\frac{\beta}{4C_0^2}\xi_0\omega^2 x\right.\\&\left.\times\left[1-\cos 2\omega\left(t-\frac{x}{C_0}\right)\right]\right\},\quad t>\frac{x}{C_0}\end{aligned} \tag{11.2.11}$$

此即为艾里-富比尼解，它是平面行波的积累解，完全可以由本书第14章中寻求积累解的方法导出。

11.3 流体中的(时间)平均压力[1~10]

为简单起见，我们下面讨论的介质是气体，它的绝热物态方程可写为

$$P=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \tag{11.3.1}$$

如果介质是一般流体，可以在所得到的结果中取代

$$\gamma=2\beta-1 \tag{11.3.2}$$

即可，式中 β 为流体的非线性系数。

我们计算一个平面行波在介质中产生的时间平均压力，首先计算欧拉平均压力。将方程(11.1.5)代入(11.3.1)式，于是得欧拉压力的表达式

$$\begin{aligned}P^{\mathrm{E}}&=P_0\left[1+\gamma(-\xi_x+\xi_x^2+\xi\xi_{xx})+\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}\xi_x^2\right]\\&=P_0\left[1+\gamma\left(-\xi_x+\frac{\gamma+1}{2}\xi_x^2\right)+\gamma\xi\xi_{xx}\right]=P^{\mathrm{L}}+\gamma P_0\xi\xi_{xx}\end{aligned} \tag{11.3.3}$$

如果声源振动由(11.2.1)式所表示，则 ξ 可用艾里-富比尼(积累)解或平面行波积累解来描述，即将(11.2.11)式代入(11.3.3)式并求它的时间平均值 $P_{\mathrm{AV}}^{\mathrm{E}}$，于是有

$$
\begin{aligned}
P_{AV}^{E} &= \gamma P_0 \left[-\frac{(\gamma+1)\omega^2\xi_0^2}{8C_0^2} + \frac{(\gamma+1)\omega^2\xi_0^2}{4C_0^2} - \frac{\omega^2\xi_0^2}{2C_0^2} \right] + P_0 \\
&= P_0 + \frac{\gamma(\gamma-3)P_0}{8C_0^2}\omega^2\xi_0^2 = \frac{\gamma-3}{8}\rho_0\omega^2\xi_0^2 + P_0
\end{aligned} \tag{11.3.4}
$$

这个式子即是在欧拉体系中的平均压力，它表明，由于 $\gamma-3<0$，那么在有平面声波传播的介质中的固定位置上测出的压力时间平均值小于静压力，或者欧拉平均压力与静压力之差是负的。

现在来讨论拉格朗日平均压力。将(11.1.4)式代入到(11.3.1)式中，就可以得到拉格朗日压力

$$
P^{L} = \gamma P_0 \left\{ -\xi_x + \frac{r+1}{2}\xi_x^2 \right\} + P_0 \tag{11.3.5}
$$

将艾里-富比尼(积累)解代入上式后，求它的时间平均值得到

$$
P_{AV}^{L} = \frac{\gamma+1}{8}\rho_0\omega^2\xi_0^2 + P_0 \tag{11.3.6}
$$

此即为拉格朗日平均压力，或者是将测量仪器跟踪流点时测得的平均压力值。

值得注意的是，在(11.3.5)中，如果不考虑位移的二阶谐波及其积累效应，即将 $\xi(x,t)$用(11.2.11)式中的线性(基波解)解来计算，则得到相应的平均压力为

$$
P_{AV0}^{L} = \frac{\gamma+1}{4}\rho_0\omega^2\xi_0^2 + P_0 \tag{11.3.7}
$$

可以看出,(11.3.6)和(11.3.7)两式的结果是有差异的，其解释如下：由逐级近似的观点来看，(11.2.11)式中的 ξ_x 二阶谐波积累解的量级与 ξ_x 基波解的平方项是同量级的，其时间平均值为

$$
(\xi_x)_{AV} = -\frac{\gamma+1}{8}\rho_0\omega^2\xi_0^2 \tag{11.3.8}
$$

合并(11.3.7)式和(11.3.8)式即可得到(11.3.6)式。这个结果表明,(11.3.7)式是忽略了 $(\xi_x)_{AV}$ 这一项所造成的。

11.4　瑞利辐射力和朗之万辐射力[6~16]

由 11.3 节的结果可知，行波声场在介质中引起的平均压力差正比于振幅的平

方，由此可知，这种压力差是非线性效应产生的，但为了要测量这个压力差需要一个测量装置(如某种传感器)放到声场中去，因而就改变了声场的分布，不同的物体特性和不同的环境将得到不同的结果，这就会给测量的定量化描述带来困难，为此，就要对物体的声学特性及其环境有一个清楚的了解。历史曾有过瑞利辐射力和郎之万辐射力，下面将对它们分别加以讨论。

1. 瑞利辐射力

按照拜尔对瑞利辐射力的陈述：在平面波传播的情况下，随流体质点一起运动的表面上受到一个不为零的平均压力；假设该流体具有相同的平均密度但流体处于静止状态，后者也将承受到另一个平均压力，前者与后者之差定义为瑞利辐射力。值得一提的是，上面所说的“平均密度”在二级近似下应等于 $\rho_0+O(M_2)$。

严格说来，“平面波”和“无限大”的平面是很难获得的，通常可以认为，在一个无限长(或有限长管，但它的末端不反射)而且墙壁无损耗的圆管中，当声波的波长比管径大很多时，管中传播的波可以视为平面波。在线性声学领域内，在一个硬壁管中充以流体，它的一端是一个做正弦振动的活塞，另一端是一个理想的吸声体，这些条件既保证了管中只有正向行波传播，又限制管内外不产生流体的物质交换。此外，如果声波频率低于管子的截止频率，则管中只有平面波传播。这时在吸声体表面的时间平均压力与周围的静压力之差称为瑞利辐射力，并用 p_R 表示。由(11.3.5)式可得

$$p_R = P_{AV}^L - P_0 = \frac{\gamma+1}{8}\rho_0\omega^2\xi_0^2 = \frac{\gamma+1}{4}\langle E\rangle \tag{11.4.1}$$

式中，$\langle E\rangle$ 为声场平均能量密度，且有

$$\langle E\rangle = \frac{1}{2}\rho_0\omega^2\xi_0^2 \tag{11.4.2}$$

韦斯特维尔特、拜尔、朱和阿普费尔的工作导出了这个结果。但另一些作者如布里渊、赫兹和门德、鲁尼和奈伯格，以及斯塔珀得到的结果却是

$$p_R = \frac{\gamma+1}{2}\langle E\rangle \tag{11.4.3}$$

显然这个结果是(11.4.1) 式的两倍，11.3 节的末尾给出了这一差异的解释。

值得一提的是，瑞利研究辐射压力的图像是[7]：声源是平面波，距离声源 l 处放置一个无限大的平面，它是刚性反射体(不是吸收体)。

2. 朗之万辐射力

正如上面指出，瑞利辐射力是针对(一维)平面波而言的，在实际情况下，这个状态是难以获得的。但从线性声学的角度出发，在一个理想刚性壁的管中，如果管的直径小于四分之一波长，则其中只有平面波传播，故人们想象地将介质限制在一个管子内，使得管内外(或者波束内外)没有物质和力的交换，从而给瑞利辐射力提供一个可实现的实际图像。朗之万辐射力则取消了这个限制，其定义如下：声场中随流点一起运动的物体表面上受到的时间平均力与该物体后面未被扰动流体中的压力之差为朗之万辐射力。

从(1.1.10a)式可知，拉格朗日体系中(三维)运动方程的矢量形式为

$$\nabla \boldsymbol{R}^{\mathrm{L}} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}^{\mathrm{L}}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \nabla P^{\mathrm{L}} \tag{11.4.4}$$

式中，∇ 是拉格朗日系中的算符，$\boldsymbol{R}^{\mathrm{L}} = (a+\xi, b+\eta, c+\zeta)$ 为流点的瞬时位置矢量，a, b, c 为流点的拉格朗日坐标变量，ξ, η和ζ 为相应的位移。由于

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \boldsymbol{R}^{\mathrm{L}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}^{\mathrm{L}}}{\partial t}\right] = \nabla \boldsymbol{R}^{\mathrm{L}} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{R}^{\mathrm{L}}}{\partial t^2} + \frac{\partial \boldsymbol{R}^{\mathrm{L}}}{\partial t} \cdot \nabla \frac{\partial \boldsymbol{R}^{\mathrm{L}}}{\partial t}$$

如果流动是无旋的，则上式右端第二项可写为 $\frac{1}{2}\nabla\left(\frac{\partial \boldsymbol{R}^{\mathrm{L}}}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\nabla\left[V^{\mathrm{L}}\right]^2$，又由于

$$\nabla \int_{P_0}^{P^{\mathrm{L}}} \frac{\mathrm{d}P}{\rho} = \frac{1}{\rho^{\mathrm{L}}} \nabla P^{\mathrm{L}}$$

利用这些关系，(11.4.4)式可以写为

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla \boldsymbol{R}^{\mathrm{L}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}^{\mathrm{L}}}{\partial t}\right] = -\nabla\left\{\int_{P_0}^{P^{\mathrm{L}}} \frac{\mathrm{d}P}{\rho} - \frac{1}{2}[V^{\mathrm{L}}]^2\right\}$$

对上式取时间平均，当平均时间取得很长时，由于 $\nabla \boldsymbol{R}^{\mathrm{L}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}^{\mathrm{L}}}{\partial t}$ 总是有界值，故有

$$\nabla\left\langle \int_{P_0}^{P^{\mathrm{L}}} \frac{\mathrm{d}P}{\rho} - \frac{1}{2}[V^{\mathrm{L}}]^2 \right\rangle = 0$$

式中，符号 $\langle\rangle$ 表示时间平均。对上式积分有

$$\left\langle \int_{P_0}^{P^L} \frac{dP}{\rho} - \frac{1}{2}[V^L]^2 \right\rangle = 常数 \tag{11.4.5}$$

对于这种情况，空间是非限定的，在声场之外无穷远处有 $P^L = P_0$，以及 $V^L = 0$，故上式中的常数为零。利用展开

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} + \left[\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_0 (P - P_0) + \cdots$$

将(11.4.5)式在 P_0 点附近展开进行积分，只保留到二级近似，并进行时间平均，于是得到

$$\left\langle P^L - P_0 \right\rangle = \frac{1}{2}\rho_0\left[V^L\right]^2 + \frac{\left\langle \left(P^L - P_0\right)^2 \right\rangle}{2\rho_0 C_0^2} \tag{11.4.6}$$

显然上式右端两项分别是声场中流点的平均动能密度和平均位能密度，如果定义声场中流点的能量密度为 E，以及表示朗之万辐射力为 P_L，于是有

$$P_L = \left\langle P^L - P_0 \right\rangle = \left\langle E \right\rangle \tag{11.4.7}$$

这个结果表明，朗之万辐射力等于声场能量密度的时间平均值与介质非线性无关。值得一提的是，这里不加区别地来说声场的能量密度或者声场中流点的能量密度，这是因为它们可分别写为

$$\left\langle E_L \right\rangle = \frac{1}{2}\rho_0[V^L]^2 + \frac{\left\langle \left(P^L - P_0\right)^2 \right\rangle}{2\rho_0 C_0^2}$$

$$\left\langle E \right\rangle = \frac{1}{2}\rho_0[V^E]^2 + \frac{\left\langle \left(P^E - P_0\right)^2 \right\rangle}{2\rho_0 C_0^2}$$

即它们都是平方项，而拉格朗日体系中的量与欧拉系中同一量的表示式的差别是二阶项，一阶项是相同的，于是在二级近似下，两个能量密度的表示式是没有区别的。

从上面两种辐射力的定义可知，产生瑞利辐射力的声源是平面波声源，为了实现这个图像，可以在一个直径比波长小得多的管中来实现。也有人用平面波束来讨论辐射力，并且要求这个波束在声传播时与外界不产生物质及动量交换(实为准直波束)，亦即是没有横向的质量流和动量流，从而使问题成为一维的(应当指出的是，应用准直波束不满足齐次波动方程，在讨论非线性问题时会带来所谓“伪

声”问题(第 8 章))。而朗之万辐射力的定义则取消了这些限制，在声传播过程中允许有横向的物质流及动量流，因而问题是三维的。当然，这里所说的横向尺寸的大小是相对于波长而言的。

另一个需要说明的问题如下，我们只是讨论了理想吸收体上的瑞利辐射力，但实际上的物体或多或少要反射声波，对于这类物体上辐射压力的计算要牵涉到有限振幅波的边值问题，正如第 8 章指出的，这个问题本身尚待发展，因此，反射体上辐射力的计算属于有待解决的问题。

综上所述，由于介质和(或)运动的非线性，使得介质中产生一个时间平均值不为零的力，它与环境压力之差定义为辐射力，根据这一原则，对不同的实际情况作具体处理。作者认为，任何定义都应当建立在具有实际意义和可实行的物理图像基础之上，否则，可能使问题更加复杂化，甚至会陷入象牙塔中。

11.5　欧拉体系中的辐射力及其应用[8, 9, 17~20]

由上述理论可知，辐射力与声场的能量密度有关，因而可以用来研究声源、声场的特性。近年来，人们利用切变扰动成像法来探测人体组织，而辐射力能够产生这种扰动，从而也表明这一问题需要进行深入研究。

从方法论的角度出发，由于上述理论都是将辐射力定义在拉格朗日体系，而通常的测力系统总是处在静止的欧拉坐标系中，原则上讲，虽然二者可以相互转换，但在实际操作中，仅在一维情况下易于实施。为此，下面我们将讨论欧拉体系下的辐射力。

1. 布里渊辐射应力张量

由理想流体中的欧拉体系方程组

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+\frac{\partial(\rho V_k)}{\partial x_k}=0$$

合并后可得

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t}=-\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} \tag{11.5.1}$$

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + pV_iV_k \tag{11.5.2}$$

在指定体积内对(11.5.1)式进行积分可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho V_i \,\mathrm{d}\tau = -\int \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}\mathrm{d}\tau = -\oint \Pi_{ik} n_k \,\mathrm{d}S \tag{11.5.3}$$

式中，左端为体积 τ 内的动量变化，S 为包含体积 τ 的表面，而

$$\Pi_{ik} n_k = pn_i + \rho V_i V_k n_k \tag{11.5.4a}$$

表示在单位时间内垂直通过单位表面的动量，称它为动量流密度张量，按照力学定律，它是作用于不动空间(欧拉体系)中物体上的辐射应力(张量)，显然，它不仅依赖于压力(各向同性)，而且依赖于质点速度，故它是一个各向异性的量(张量)。将(11.5.4)用向量符号表示

$$\boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{n} = P\boldsymbol{n} + \rho \boldsymbol{V}(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{n}) \tag{11.5.4b}$$

2. 二级近似

由欧拉方程组

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} + (\boldsymbol{V} \cdot \nabla)\boldsymbol{V}\right) = -\nabla P \tag{11.5.5}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0 \tag{11.5.6}$$

逐步近似

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V} &= \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2 + \cdots \\ \rho &= \rho_0 + \rho_1 + \rho_2 + \cdots \\ P &= P_0 + P_1 + P_2 + \cdots \end{aligned} \tag{11.5.7}$$

(11.5.7)式中各个符号的下标(0, 1, 2)表明它是几阶小量。将(11.5.7)式代入(11.5.5)式和(11.5.6)式，取各阶小量相等便可得到

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{V}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 = -C_0^2 \nabla \rho_1$$
$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{V}_2}{\partial t} + \rho_1 \frac{\partial \boldsymbol{V}_1}{\partial t} + \rho_0 (\boldsymbol{V}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{V}_1 = -\nabla p_2 \tag{11.5.8}$$

若一阶场是无旋的，则有

$$(\boldsymbol{V}_1 \cdot \nabla)\ \boldsymbol{V} = \frac{1}{2} \nabla\ (\boldsymbol{V}_1)^2 \tag{11.5.9}$$

合并(11.5.8)式与(11.5.9)式，然后沿梯度方向积分可得

$$P = P_0 + p_1 + p_2 = P_0 + \frac{C_0^2}{2\rho_0} (\rho_1)^2 - \frac{\rho_0}{2} (\boldsymbol{V}_1)^2 \tag{11.5.10}$$

上式最后一个等式右端的第二项(声场的位能)和第三项(动能的负值)是拉格朗日函数 L 的负值。

3. 平面波在平面吸收靶上的辐射力

若在声场中放置一个无限大的平面吸收靶，其法线与声波的传播方向重合(平面波)，将 (11.5.10)式代入 (11.5.4)式，并将所得结果作时间平均便可得到

$$\Pi_{AV} - P_0 = \frac{1}{2} \rho_0 \left[\left(\frac{C_0}{\rho_0} \rho_1 \right)^2 + (\boldsymbol{V}_1)^2 \right]_{AV} \tag{11.5.11}$$

如果在声场中放置一个吸收靶，其面积足以覆盖全部声场，将(11.5.11)式代入(11.5.3)式在靶面上进行积分即可得到作用于靶上的法向辐射力 F_n 与辐射声功率 W 的关系为

$$F_n = GW \tag{11.5.12}$$

式中，G 为常数，它依赖于声源和声场的性质。根据(11.5.12)式，钱祖文等利用此法测量了聚焦声源的辐射声功率[20]。

参 考 文 献

[1] Beyer R T. Radiation pressure-the history of a mislabeled tensor. Jour Acoust Soc Am, 1978, 63: 1025~1030

[2] Westervelt P J. The mean pressure and velocity in a plane acoustic wave in a gas. Jour Acoust Soc Am. 1950, 22: 319~327

[3] Hunt F V. Notes on the exact equations governing the propagation of sound in fluids. Jour Acoust Soc Am, 1955, 27: 1019~1039

[4] Fubini-Ghiron E. Anomalies in the propagation of an acoustic wave of large amplitude. Alta Freq, 1935, 4: 532~581 (Nonlinear acoustics in fluids. Benchmark Papers in Acoustics Series. Van Nostrand Reinhold Company, 1984.118~177)

[5] Chu Baoteh, Apfel R E. Acoustic radiation pressure produced by a beam of sound. Jour Acoust Soc Am, 1982, 72: 1673~1687

[6] Rayleigh L. On the pressure of vibrations. Phil Mag, 1902, 3: 338

[7] Rayleigh L. On the momentum and pressure of gaseous vibrations, and on the connexion with the Virial theorem. Phil Mag, 1905, 10: 364~374

[8] Brillonin L. On the tensions of radiation. Ann Phys, 1925, 4: 528

[9] Borgnis F E. Acoustic radiation pressure of plane compressional waves. Rev Mod Phys, 1953, 25: 653~664

[10] Gol'dberg Z A. Momentum flux in sound waves. Proc 5th Congr Intern d'Acoust, Liege', 1965. K 44

[11] Beyer R T. Nonlinear acoustics, Department of the Navy, Sea Sestem Command, 1974

[12] Beyer R T. Nonlinear acoustics in fluids. Benchmark Papers in Acoustics Series, Van Nostrand Reinhold Company, 1984

[13] Rooney J A, Nyborg W L. Acoustic radiation pressure in a traveling plane wave. Amer Jour Phys, 1972, 40: 1825~1830

[14] Stapper M. A simplified approach to the mechanics of acoustical wave propagation applicable to the problems of radiation pressure. part I. on the theory of longitudinal wave propagation. Acustica, 1978, 39: 105~110

[15] Nyborg W L, Rooney J A . Notes on "Acoustic radiation pressure produced by a beam of sound" . Jour Acoust Soc Am, 1984, 75: 263,264

[16] Chu B, Apfel R E. Response to the comments of Nyborg and Rooney. Jour Acoust Soc Am, 1984, 75: 1003,1004

[17] Landau L D, Lifshitz E M. Fluid mechanics. 2nd ed. 北京：世界图书出版公司, 1998

[18] Westervelt P J. The theory of steady forces caused by sound waves. Jour Acoust Soc Am, 1951, 23: 312~315

[19] 钱祖文. 高强度聚焦超声(HIFU)———一门多学科的研究课题. 物理, 2007, 36：701~707

[20] Qian Z W. Zhu Z, Ye S, et al. Acoustic radiation force on objects and power measurements of focusing source (HIFU). Proc IEEE International Ultrasonics Symposium (IUS), Beijing, China, 2008

第 12 章 声 流

介质中有强声波传播时，往往会出现一种非周期的流动，这种现象称为声流。如果一个正弦简谐扰动按线性声学规律(如胡克定律)在介质中向前传播，由于不同的质点都是以各自的相位做正弦振动，因此空间任何一点流速的时间平均值皆为零，即小振幅声波在线性介质中不产生声流。

另外，如果介质原来是宏观静止的，但当有声波传播时却产生了声流，按照力学定律可知，沿声流方向上，声场对介质必然施加了一个按时间平均且其值不为零的力。为了探索声流产生的机理，首先必须弄清几种可能的力。第一，辐射场的梯度有可能产生等效的时间平均力，第二，耗散阻力或者等效耗散阻力有可能产生时间平均值不为零的力，下面将分别探讨哪一种力是产生声流的原因。在系统地研究这一问题之前，有必要简单叙述一下历史。

实验上很早就发现了声流现象，而瑞利最早从理论上研究了管中的平均流现象，或者称为德沃夏克(Dvorak)现象[1, 2]；后来的舒斯特(Schuster)和马茨(Matz)等也研究了孔德(Kundt)管中的平均流问题；厄卡特(Eckart)系统地、深入地研究了声流理论；后来梅德温(Medwin)和拉德尼克(Rudnick)取消了厄卡特理论中的下述两个限制：一阶场无旋和介质黏滞系数与密度无关，修正了厄卡特理论；斯塔特尼科夫(Статников)从理论上进一步研究了一阶声场为冲击波的情形。

12.1 厄卡特理论[3]

厄卡特从理论上系统地研究了声流产生的机理及性质，为了使读者受到启发，本节仍保留他的思路精髓。

下面首先略去黏滞力，则连续性方程和运动方程分别为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{u})=0 \tag{12.1.1}$$

$$\frac{\partial(\rho \boldsymbol{u})}{\partial t}+\rho(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\nabla\cdot(\rho \boldsymbol{u})=-\nabla P \tag{12.1.2}$$

假设流体是正压(或者等熵)的，即 $P=P(\rho)$，于是有

$$\nabla P=C^2\nabla\rho \tag{12.1.3}$$

式中，$C=C(\rho)$ 为局部声速。将流体场展成(省去微扰参数没写)

$$\rho=\rho_0+\rho_1+\rho_2+\cdots \tag{12.1.4}$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\cdots \tag{12.1.5}$$

式中，ρ_0 为介质处于静止状态时的密度，它是常量，因为没有声场时介质静止，故 $\boldsymbol{u}_0=0$, $\boldsymbol{u}_1$ 是声场一阶量，$\rho_2,\boldsymbol{u}_2$ 为声场二阶量。将这些展开式代入方程组，并使各阶量分别相等，于是有

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1=0 \tag{12.1.6}$$

$$\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{u}_1}{\partial t}=-C_0^2\nabla\rho_1 \tag{12.1.7}$$

以及

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_2+\nabla\cdot(\rho_1\boldsymbol{u}_1)=0 \tag{12.1.8}$$

$$\begin{aligned}&\rho_0\frac{\partial\boldsymbol{u}_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}(\rho_1\boldsymbol{u}_1)+\rho_0[(\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_1\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1]\\&=-C_0^2\nabla\rho_2-C_0\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0\nabla\rho_1^2\end{aligned} \tag{12.1.9}$$

式中，$\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0$ 为局部声速随密度变化的平衡值。如果定义一阶声场的能量密度：

$$W=\frac{1}{2}\rho_0\boldsymbol{u}_1^2+\frac{1}{2}\rho_0C_0^2\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^2 \tag{12.1.10}$$

以及

$$\rho_2'=\rho_2-\frac{W}{C_0^2} \tag{12.1.11}$$

根据向量等式

$$\boldsymbol{u}_1\cdot\nabla\boldsymbol{u}_1=\frac{1}{2}\nabla\boldsymbol{u}_1^2-\boldsymbol{u}_1\nabla\times\boldsymbol{u}_1$$

设一阶场是无旋的，应用上述 6 个方程组及上述关系将(12.1.8)式和(12.1.9)式改写成

$$\frac{\partial \rho_2'}{\partial t}+\rho_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_2=0 \tag{12.1.12}$$

$$\rho_0\frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial t}=-C_0^2\nabla\rho_2-\nabla\left[\rho_0\boldsymbol{u}_1^2+C_0\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0\rho_1^2\right] \tag{12.1.13}$$

或者

$$\rho_0\frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial t}=-C_0^2\nabla\rho_2+\nabla W-\nabla\left[\rho_0\boldsymbol{u}_1^2+C_0\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0\rho_1^2\right] \tag{12.1.14}$$

容易证明

$$C_0\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0=\rho_0^{-1}C_0^2(\beta-1) \tag{12.1.15}$$

利用这个关系及 W 的表示式可将(12.1.14)式写为

$$\rho_0\frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial t}=-C_0^2\nabla\rho_2-\nabla\left[\frac{1}{2}\rho_0u_1^2-\frac{3}{2}\rho_0C_0^2\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^2+\beta\rho_0C_0^2\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^2\right] \tag{12.1.16}$$

对于平面波来说

$$\frac{1}{2}\rho_0u_1^2-\frac{3}{2}\rho_0C_0^2\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^2$$

现在我们来看一看(12.1.16)式右端两项的物理意义。显然，该式右端是两个梯度项，第一项是二阶声压梯度，第二项是一项压力梯度。如果取它们的时间平均，则其右端第一项不为零，而第二项等于表达式$(\beta-1)\langle E\rangle$的梯度，式中$\langle E\rangle$是平均能量密度，对于平面波而言，在二级近似下它是常数，因而在梯度算子的作用下它也等于零。

在一般情况下，从(12.1.12)式以及(12.1.13)式消去 ρ_2' 或 $\boldsymbol{u}_2$. 可分别得到

$$\rho_0\left[\frac{\partial^2\boldsymbol{u}_2}{\partial t^2}-C_0^2\nabla^2\boldsymbol{u}_2\right]-\rho_0C_0^2\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}_2=-\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_0\boldsymbol{u}_1^2+C_0\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0\rho_1^2\right] \tag{12.1.17}$$

$$\frac{\partial^2 \rho_2'}{\partial t^2} - C_0^2 \nabla^2 \rho_2' = \nabla^2 \left[\rho_0 u_1^2 + C_0 \left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho} \right)_0 \rho_1^2 \right] \tag{12.1.18}$$

从(12.1.17)式, (12.1.18)式可见，如果 u_1 和 u_2 是无旋场，则(12.1.17)式和(12.1.18)式是以一阶场的平方为源函数的非齐次波动方程的标准形。设一阶场是正弦式声波，则其平方项可以表示为常量项与一项二阶谐波项之和，由此可见，如果取这两个式子的时间平均值，则其右端皆为零。这个结果表明，在无黏无旋的流体中，即使存在辐射压力，也不会产生声流。

现在来讨论黏滞流体中的声流问题，根据一般的纳维-斯托克斯方程组：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{12.1.19}$$

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{u} = -C^2 \nabla \rho + \left(\varsigma + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{u} + \eta \nabla^2 \boldsymbol{u} \tag{12.1.20}$$

假设黏滞系数 η 和比值 ς / η 与介质的密度无关，仍采用逐步近似，将 ρ 和 $\boldsymbol{u}$ 展成各阶量之和，并将展开式代入上面的方程组，使各阶量相等，便可得到

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1 = 0 \tag{12.1.21}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{\partial t} = -C_0^2 \nabla \rho_1 + \left(\frac{4}{3} \eta + \varsigma \right) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1 - \eta \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u}_1 \tag{12.1.22}$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{u}_2 + \nabla \cdot (\rho_1 \boldsymbol{u}_1) = 0 \tag{12.1.23}$$

$$\begin{aligned} &\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 \boldsymbol{u}_1) + \rho_0 [(\boldsymbol{u}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_1 \nabla \cdot \boldsymbol{u}_1] \\ &= -C_0^2 \nabla \rho_2 - C_0 \left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho} \right)_0 \nabla \rho_1^2 + \left(\frac{4}{3} \eta + \varsigma \right) \nabla \nabla \cdot \boldsymbol{u}_2 - \eta \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u}_2 \end{aligned} \tag{12.1.24}$$

类似于前面的计算，应用这 4 个方程，假设一阶场是无旋的，于是二阶场满足

$$\frac{\partial \rho_2'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\rho_0 C_0^2} \left(\frac{4}{3} \eta + \xi \right) \boldsymbol{u}_1 \cdot \nabla \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right) \tag{12.1.25}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{\partial t} = -C_0^2 \nabla \rho_2' - \nabla(\rho_0 \boldsymbol{u}_1^2) + \left(\frac{4}{3}\eta + \varsigma\right) \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{u}_2$$
$$- C_0 \left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0 \nabla \rho_1^2 - \eta \nabla\times\nabla\times \boldsymbol{u}_2 - \left(\frac{4}{3}\eta + \varsigma\right) \frac{\rho_1}{\rho_0} \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1 \tag{12.1.26}$$

消去ρ_2'可得

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{u}_2}{\partial t^2} - \rho_0 C_0^2 \nabla^2 \boldsymbol{u}_2 - \rho_0 C_0^2 \nabla\times\nabla\times \boldsymbol{u}_2 - \left(\frac{4}{3}\eta + \varsigma\right) \frac{\partial}{\partial t} (\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{u}_2) + \eta \frac{\partial}{\partial t} (\dot{\nabla} \times \nabla \times \boldsymbol{u}_2)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \nabla \left[\rho_0 \boldsymbol{u}_1^2 + C_0 \left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0 \rho_1^2 \right] \right\}$$
$$- \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4}{3}\eta + \varsigma\right) \frac{\partial}{\partial t} [\rho_1 \nabla\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1] - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4}{3}\eta + \varsigma\right) \nabla \left[\boldsymbol{u}_I \cdot \nabla \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right) \right] \tag{12.1.27}$$

对(12.1.26)式和(12.1.27)式分别进行旋度和散度运算，并定义

$$D_i = \nabla \cdot \boldsymbol{u}_i$$
$$\boldsymbol{R}_i = \nabla\times \boldsymbol{u}_i, \quad i = 1, 2 \tag{12.1.28}$$

可以得到D_2和$\boldsymbol{R}_2$的方程：

$$\rho_0 \left[\frac{\partial^2 D_2}{\partial t^2} - C_0^2 \nabla^2 D_2 \right] - \left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right) \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 D_2}{\partial t}\right)$$
$$= -\nabla^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_0 \boldsymbol{u}_1^2 + C_0 \left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0 \rho_1^2 \right] \right\} - \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right) \nabla \cdot \left[\frac{\partial(\rho_1 \nabla D_1)}{\partial t} \right]$$
$$- \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{4}{3}\eta + \varsigma\right) \nabla^2 \left[\boldsymbol{u}_1 \cdot \nabla \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right) \right] \tag{11.1.29}$$

和

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}_2}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_0} \nabla^2 \boldsymbol{R}_2 = \frac{1}{\rho_0^3} \left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right) \nabla \rho_1 \times \nabla \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right) \tag{12.1.30}$$

不难看出，即使一阶场是无旋的，上式右端的时间平均值一般并不为零，如当ρ_1是正弦波时便是如此，因而$\boldsymbol{R}_2$的时间平均值不为零，介质中的声流以涡旋的形式出现，特别是稳态涡旋满足方程：

$$\nabla^2 \boldsymbol{R}_2 = -\frac{1}{{\rho_0}^2}\left(\frac{4}{3}+\frac{\zeta}{\eta}\right)\nabla\rho_1\times\nabla\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial t}\right)-\frac{1}{\rho_0}\left(\nabla\rho_1\times\nabla\times\boldsymbol{R}_1-\rho_1\nabla^2\boldsymbol{R}_1\right) \quad (12.1.31)$$

为了更具体地说明声流的存在，我们举一个管中声波产生声流的例子，这个管子两端是封闭的，管壁为刚性，半径为 r_0，长度足够长，以保证终端没有反射，封入管中的是黏性流体。设一阶声场的压力变化可表示为沿管轴方向传播的行波，即

$$p_1 = C_0^2\rho_1 = P(r)\sin(kz-\omega t) \quad (12.1.32)$$

将这个结果代入(12.1.31)式，可得

$$\nabla^2 \boldsymbol{R}_2 = K\frac{\mathrm{d}P^2(r)}{\mathrm{d}r}[-\boldsymbol{i}\sin\varphi+\boldsymbol{j}\cos\varphi] \quad (12.1.33)$$

式中

$$K=\frac{k^2}{2\rho_0^2C_0^3}\left(\frac{4}{3}+\frac{\zeta}{\eta}\right) \quad (12.1.34)$$

式中，φ 为管截面上的极角，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 为该截面上沿 x, y 轴方向上的单位矢量。显然，方程(12.1.33)的特解形如

$$\boldsymbol{R}_2 = f(r)[-\boldsymbol{i}\sin\varphi+\boldsymbol{j}\cos\varphi] \quad (12.1.35)$$

式中 $f(r)$ 满足方程

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{1}{r^2}\right]f(r)=K\frac{\mathrm{d}P^2}{\mathrm{d}r}$$

上式左端可以写成 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rf)\right]$，故上式积分可写成

$$f(r)=\frac{K}{r}\int_0^r rP^2\mathrm{d}r+2Nr+\frac{M}{r} \quad (12.1.36)$$

式中，N, M 为积分常数，显然，为了使 $f(r)$ 在 $r=0$ 处连续，有 $M=0$。因为管中的流动只有沿管轴方向的速度，即 $u_{2r}=u_{2\varphi}=0,\quad u_{2z}=g(r)$，故有

$$\boldsymbol{R}_2=\nabla\times\boldsymbol{u}_2=(\boldsymbol{i}\sin\varphi-\boldsymbol{j}\cos\varphi)\frac{\mathrm{d}g(r)}{\mathrm{d}r} \quad (12.1.37)$$

由(12.1.35)式可得

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}=-f(r) \tag{12.1.38}$$

因为黏滞流体完全附着在管壁，故 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 时，$u_{2z}=0$，或者

$$g(r_0)=0$$

于是(12.1.38)式的积分为

$$\begin{aligned} g(r) &= \int_r^{r_0} f(t)\mathrm{d}t = K\int_r^{r_0}\int_0^t \frac{x}{t}P^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \beta(r_0^2-r^2) \\ &= KW(r)+\beta(r_0^2-r^2) \end{aligned}$$

式中，$W(r)$为下面二重积分：

$$W(r)=\int_r^{r_0}\int_0^t \frac{x}{t}p^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

改变积分次序，可得

$$\begin{aligned} W(r) &= \int_0^r xp^2(x)\int_r^{r_0}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_r^{r_0} xP^2(x)\int_x^{r_0}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= \int_0^r xP^2(x)\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)\mathrm{d}x + \int_r^{r_0} xP^2(x)\ln\left(\frac{r_0}{x}\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

如果定义

$$\Gamma(x,r)=\begin{cases} x\ln\left(\dfrac{r_0}{r}\right), & 0<x<r \\ x\ln\left(\dfrac{r_0}{x}\right), & r<x<r_0 \end{cases} \tag{12.1.39}$$

于是 $W(r)$可表示为

$$W(r)=\int_0^{r_0} T(x,r)P^2(x)\mathrm{d}x$$

于是

$$g(r)=K\int_0^{r_0}\Gamma^2(x,r)p^2(x)\mathrm{d}x+\beta(r_0^2-r^2) \tag{12.1.40}$$

由于管的两端是封闭的，故通过任何管截面的净流量必须为零，即

$$\int_0^{r_0} rg(r)\mathrm{d}r = 0$$

将(12.1.40)式代入上式进行计算，注意交换积分次序，最终可得

$$\beta = \frac{K}{r_0^4}\int_0^{r_0} P^2(x)(x^3 - xr_0^2)\mathrm{d}x \tag{12.1.41}$$

如果一阶声场为准直束，即

$$\mathrm{P} = \begin{cases} P_0, & r \leqslant r_1 \\ 0, & r > r_1 \end{cases}$$

则代入 $W(r)$的表达式可得

$$\begin{aligned} W(r) &= P_0^2\left\{\int_0^r \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)x\mathrm{d}x + \int_r^{r_1} x\ln\left(\frac{r_0}{x}\right)\mathrm{d}x\right\} \\ &= \frac{P_0^2 r_1^2}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right] + \ln\left(\frac{r_0}{r_1}\right)\right\}, \quad r \leqslant r_1 \end{aligned}$$

以及

$$\beta(r) = \frac{KP_0^2}{r_0^4}\int_0^{r_1}(x^3 - xr_0^2)\mathrm{d}x = \frac{KP_0^2}{2}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2 - 1\right]$$

如果 $r > r_1$，则

$$W(r) = \int_0^{r_1} P_0^2 \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)x\mathrm{d}x = \frac{P_0^2 r_0^2}{2}\ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$$

令 $x = \frac{r}{r_0}, y = \frac{r_1}{r_0}$,于是有

$$g(r) = G(r_1)\begin{cases} \left[\frac{1}{2}(1 - \frac{x^2}{y^2}) - (1 - x^2)\left(1 - \frac{1}{2}y^2\right) - \ln y\right], & 0 < x \leqslant y \\ \left[-\left(1 - \frac{1}{2}y^2\right)(1 - x^2) - \ln x\right], & y < x < 1 \end{cases} \tag{12.1.42}$$

式中

$$G(r_1)=\frac{1}{2}KP_0^2r_1^2 \tag{12.1.43}$$

由(12.1.42)式可知，声流速度正比于 $G(r_1)$，并且在准直束外的流是反向的(图 12.1)。这种声流称为厄卡特流，其理论和实验图示见图 12.1 和图 12.2。由于这种声流正比于黏滞比 $\left(\frac{4}{3}+\frac{\xi}{\eta}\right)$，故有可能用这个理论结果来测量流体的第二黏滞系数[4]。

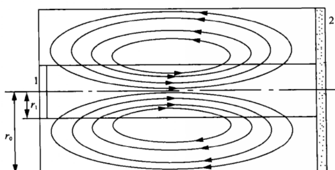


图 12.1 厄卡特声流理论图

1.声源；2.吸收体



图 12.2 厄卡特声流实验图示

12.2 梅德温-拉德尼克修正[5]

由 12.1 节可知，厄卡特理论假设一阶场是无旋的，介质黏滞系数与密度无关，

梅德温和拉德尼克取消了这两个限制，他们从一般的流体力学公式

$$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = \nabla \cdot \boldsymbol{P} \tag{12.2.1}$$

出发导出声流公式，式中

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ii}P_{11} & \boldsymbol{ij}P_{12} & \boldsymbol{ik}P_{13} \\ \boldsymbol{ji}P_{21} & \boldsymbol{jj}P_{22} & \boldsymbol{jk}P_{23} \\ \boldsymbol{ki}P_{31} & \boldsymbol{kj}P_{32} & \boldsymbol{kk}P_{33} \end{pmatrix}$$

为并矢矩阵，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 是单位向量，而 P_{ij} 为称张量分量，即 $P_{ij} = P_{ji}$，根据应力与应变速度的关系，它们可表示为

$$P_{ij} = \left[-P + \left(\varsigma - \frac{2}{3}\eta\right)\nabla \cdot \boldsymbol{V}\right]\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \tag{12.2.2}$$

式中，P 为流体中的压力，而

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = i, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3, \cdots$$

以及

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{i}u_1 + \boldsymbol{j}u_2 + \boldsymbol{k}u_3$$

假设 η 为常数，而 ζ 是体积黏滞系数，它有可能随密度变化，于是将(12.2.2)式代入(12.2.1)式，考虑到 ζ 随密度变化，并将所得结果写成向量形式：

$$\rho \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = -\nabla P + \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{V} - \eta\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{V} + (\nabla\zeta)\nabla \cdot \boldsymbol{V} \tag{12.2.3}$$

利用逐步近似，可以得到一阶场和二阶场的方程组，将它们分别写成

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{V}_1 = 0 \tag{12.2.4}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{V}_1}{\partial t} = -C_0^2 \nabla \rho_1 + \left(\frac{4}{3}\eta + \xi\right)\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{V}_1 - \eta\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{V}_1 \tag{12.2.5}$$

$$\rho_0\frac{\partial \boldsymbol{V}_2}{\partial t}+\rho_1\frac{\partial \boldsymbol{V}_1}{\partial t}+\rho_0(\boldsymbol{V}_1\cdot\nabla)\boldsymbol{V}_1=-C_0^2\nabla\rho_2-C_0\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}\rho}\right)_0\nabla\rho_1^2+\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\rho}\right)_0(\nabla\cdot\boldsymbol{V}_1)\nabla\rho_1$$
$$+\left(\frac{4}{3}\eta+\varsigma\right)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{V}_2+\left(\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\rho}\right)_0\rho_1\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{V}_1-\eta\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{V}_2 \tag{12.2.6}$$

式中，$\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$ 分别为一阶速度和二阶速度向量。将(12.2.4)式和(12.2.5)式代入(12.2.6)式，并将得到的结果式进行一次旋度运算，利用等式

$$\nabla\times(a\boldsymbol{A})=a\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla a\times\boldsymbol{A},\quad (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\times\nabla\times\boldsymbol{A}$$

$$\nabla\times(\nabla a)=0,\quad \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0,\quad \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

令

$$\boldsymbol{R}_i=\nabla\times\boldsymbol{V}_i,\quad i=1,2 \tag{12.2.7}$$

于是有稳态涡旋解

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{R}_2=&-\frac{1}{\rho_0^2}\left(\frac{4}{3}+\frac{\partial}{\eta}\right)\nabla\rho_1\times\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\rho_1)\\&-\frac{\rho_0}{\eta}\nabla(\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{R}_1)-\frac{1}{\rho_0}\nabla\times(\rho_0\nabla\times\boldsymbol{R}_1)\end{aligned} \tag{12.2.8}$$

如果在上式右端使第二和第三两项为零，则它就退化为(12.1.31)式，即厄卡特的理论结果。另外一点值得提起，在推导上式的过程中，曾经假设了 ζ 依赖于密度，但最终结果表明，这对二阶涡旋场不产生影响。

从这个结果可以看出，如果在一个有限空间(如直径较大的管中)，或者在某个障碍物的绕流中，一阶涡旋声场 R_1 只有在很薄边界层内不为零，而在远离这个层之外，$R_1=0$，不妨定义这里的二阶涡旋源(即上式右端第一项)为体积涡漩源，而厄卡特声流即为这种源引起的。在表面层中 $R_1\neq0$，定义这里的源为表面源(上式中的第二、第三两项)，这种表面源在边界附面层中是很强的。

根据上面的分析能够看出，厄卡特理论对于远离边界层区域内的一维声流问题是正确的，而在边界层附近，则要作梅德温和拉德尼克表面源的修正。

12.3 有限振幅声波声流[6]

在厄特卡声流理论中，所用的一阶声场在传播过程中，本身有限振幅效应未加考虑，这个问题是斯塔特尼科夫解决的。他从黏滞流体力学方程组出发，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\boldsymbol{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\frac{\eta}{\rho}\nabla^2\boldsymbol{V}+\frac{1}{\rho}(\zeta+\frac{1}{3}\eta)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{V} \tag{12.3.1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 \tag{12.3.2}$$

令

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_0+\boldsymbol{V}_1,\quad \rho=\rho_0+\rho_1,\quad P+P_0+P_1 \tag{12.3.3}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{V}_0&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{V}\mathrm{d}t=\langle\boldsymbol{V}\rangle\\ \rho_0&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\rho\mathrm{d}t=\langle\rho\rangle\\ P_0&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T P\mathrm{d}t=\langle P\rangle\end{aligned}\right\} \tag{12.3.4}$$

即认为$\boldsymbol{V}_1,\rho_1$和P_1的时间平均值为零。将(12.3.3)式代入(12.3.2)式，并将所得结果式进行一次时间平均，由(12.3.4)式可得

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{V}_0+\frac{1}{\rho_0}\langle\rho_1\boldsymbol{V}_1\rangle\right)=0 \tag{12.3.5}$$

令

$$\boldsymbol{V}_0+\frac{1}{\rho_0}\langle\rho_1\boldsymbol{V}_1\rangle=\boldsymbol{U} \tag{12.3.6}$$

则有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{U}=0 \tag{12.3.7}$$

由(12.3.1)式和(12.3.2)式，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{V})+\rho \boldsymbol{V}\cdot\nabla \boldsymbol{V}+\rho \boldsymbol{V}\nabla\cdot \boldsymbol{V}=-\nabla P+\eta\nabla^2 \boldsymbol{V}+\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla\nabla\cdot \boldsymbol{V} \tag{12.3.8}$$

将(12.3.3)式~(12.3.7)式代入(12.3.8)式，可以得到

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}-\frac{\eta}{\rho_0}\nabla^2 \boldsymbol{U}=\frac{1}{\rho_0}\nabla P+\boldsymbol{F} \tag{12.3.9}$$

式中

$$\begin{aligned}\mathbf{F}=&-\langle \boldsymbol{V}_1\cdot\nabla \boldsymbol{V}_1\rangle-\langle \boldsymbol{V}_1\nabla\cdot \boldsymbol{V}_1\rangle-\frac{1}{\rho_0}\eta\nabla^2\langle\rho_1 \boldsymbol{V}_1\rangle\\&-\frac{1}{\rho_0^2}(\zeta+\frac{\eta}{3})\nabla\nabla\cdot\langle\rho_1 \boldsymbol{V}_1\rangle\end{aligned} \tag{12.3.10}$$

将(12.3.9)式与(12.3.1)式对比可知，如果某种流体的两个黏滞系数满足

$$\zeta+\eta/3=0$$

它的质点宏观流速为 $\boldsymbol{U}$ 时，则它上面作用的等效体积力为 $\boldsymbol{F}$，由(12.3.7)式可知，这种流动是不可压缩的，根据流体力学原理可知，这种流动所对应的马赫数应比1小很多。

当一阶声场为平面行波时，在(12.3.10)式中 $\nabla\rightarrow \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}$，且 $V_1/C_0\approx\rho_1/\rho_0$，于是有

$$F=-\frac{\partial}{\partial x}\langle V_1^2\rangle-\frac{1}{\rho_0 C_0}\left(\xi+\frac{4}{3}\eta\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\langle V_1^2\rangle \tag{12.3.11}$$

对于声雷诺数很小(即 $Re\ll 1$)的小振幅声波，有

$$V_1=V_{10}\mathrm{e}^{-\alpha_0 x+\mathrm{j}\omega(t-x/C_0)}$$

α_0 为黏滞吸收系数，将这个式子代入(12.3.11)式，容易得到

$$F\approx\alpha_0 V_{10}^2 \tag{12.3.12}$$

如果在离边界层很远的地方，(12.3.12)式即为产生厄卡特流的等效力。这个结果也表明，如果黏滞系数为零，则产生这种流的等效力不复存在，这也与厄卡特的结论一致。

如果声雷诺数 $Re\gg 1$，则声场或者是用富比尼解表示($0<\sigma<1$)，或者是用

法伊解来表示($\sigma > \pi/2$)，将这些解分别代入(12.3.10)式，则可以算出不同情况下的等效力 F。例如对于锯齿波声场($\sigma > \pi/2$)来说，由于

$$\frac{V_1}{V_{10}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(1+\sigma)} \sin \omega\tau \tag{12.3.13}$$

将它代入(12.3.11)式可得

$$F = \frac{2\pi^2}{3} \frac{\beta\omega V_{10}^3}{(1+\sigma)^3 C_0^2} \tag{12.3.14}$$

这个结果表明，即使介质不存在黏滞，但由于有限振幅吸收效应，也能产生声流。

参 考 文 献

[1] Rayleigh L. Theory of sound. Vol. 2.New York: Dover Publications, 1945

[2] Schlichting H. Berechnung ebener periodischer grenchichtströmungen. Physik Z, 1932, 33: 327~335

[3] Eckart C. Vortices and streams caused by sound waves Phys Rev, 1948, 73: 68~76

[4] Liebermann L N. The second viscisity of liquids .Fhys Rev, 1949, 75: 1415~1422

[5] Medwin H, Rudnick I. Surface and volume sources of vorticity in acoustic fields. Jour Acoustr Soc Am, 1953, 25: 538~540

[6] Статников Ю Г. Потоки вызванныи звукои конечной амплитуды Акуст Ж, 1967, 13: 146~147

第 13 章　气泡的有限振幅振动

液体受到某种扰动致使其中出现空腔，这种现象称为空化。这种空腔也许是短暂的真空，也许被气体或者蒸气所填充。根据相平衡的热力学理论，当温度、压力一定时，溶解在液体中的某种气体与它在大气中的气态成分处于相平衡状态，与此同时，该液体与它的蒸气也处于相平衡状态。如果温度或压力发生变化，则相平衡曲线产生偏移。例如，当温度升高或者压力降低时，原来处于液态的气体(溶解了的气体) 就会部分变成气体，或者液体汽化，于是在液体中产生新的气泡、蒸气泡或者两种气态成分的混合空泡。除了这种产生空泡的原因以外，电解、有机体的腐蚀、生命活动如水生物的呼吸等都可以在液体中产生空泡。

空化可以分成两大类，即流体力学空化和能量积蓄空化，前者包括水力学空化和声空化，后者包括光空化和粒子射线空化。

所谓水力学空化是指液体中存在高速运动物体(如船舶的螺旋桨的高速旋转)，根据伯努利定理，运动速度大的地方压力小，如果运动速度达到一定的极限值，足以使得其中的液态气体(或者液体本身)气(汽)化，就会产生空泡。当液体中有声波通过时，由于声压是交变的，正半周使局部压力增高，而负半周使得局部压力减小，当声压振幅达到一定的极限值(称为空化阈值)时，在负半周就去形成空泡，这就是所谓声空化，由于气化速率是有限值，故声空化必定与频率有关。当频率足够高，以使得溶解气体还没有来得及气化时其压力已改变了方向，故高频声波不易产生空化。所以水力学空化(包括声空化)多半是在压力降低时产生的。

光空化是将一束激光聚焦于液体中某点，将光能转化为热能，使液体(或溶解气体)汽(气)化，从而出现空腔。光空化已成为产生气泡的一种方法。

如果一束高能粒子(如宇宙线中的高能粒子)射入液体，使得粒子束的能量传递给液体，从而产生粒子射线空化。其实光空化也是粒子射线空化，只不过它的粒子是 γ 光子而已。

通常液体中总是存在一定量的微气泡，这类气泡称为空化核，一旦外界出现扰动，总会使这些微气泡的大小产生变化。例如，原来处于相平衡的二相系，当扰动的等效压力增大或者等效温度降低时，将使更多的气态物质转化为液态；反之，当扰动的等效压力降低或等效温度升高时，过程就反向，即将有较多的液态物质转向气态；若扰动是交变的，且气化率高于液化率，则会使这些微气泡增大，即空化在发展。反之，则会使这些微气泡缩小，即空化在萎缩或称为气泡的坍缩。为了研究空泡的发展和坍缩，本章将着重分析气泡的运动。

13.1 气泡的振动方程组和边界条件

由线性声学理论可知，只受静压力和表面张力作用下的气泡，在其平衡半径附近做小振幅振动时，其共振频率可表示为[1]

$$f_r = \frac{1}{2\pi R_0}\sqrt{\frac{3\gamma_1 P_0}{\rho}}, \quad \gamma_1 = \begin{cases} \gamma & \text{绝热过程} \\ \gamma_1(R_0,\sigma) \end{cases} \tag{13.1.1}$$

式中，R_0 为气泡的平衡半径，σ 为表面张力系数，P_0 和 ρ 分别为气泡周围液体中的静压力和平衡密度，γ 为气泡内气体的比热比。当气泡半径很小以使得表面张力的贡献不可忽略时，$\gamma_1(R_0,\sigma)$ 的具体形式尚待研究。当一个气泡做简谐振动时，它由最小半径膨胀到最大半径，再由最大半径缩小到最小半径，这样就完成一个周期振动，两个过程所经历的时间相等，且等于半周期。这类气泡的运动规律可以用线性化了的流体力学和热力学方程组来描写。

但对于有限振幅振动气泡的发展和坍缩过程来说，其两个“半周期”一般不相等，在空腔出现时其尺寸增长很快，迅速达到最大尺寸，然后再由最大尺寸坍缩成一个或者若干个小气泡，由于振动幅度较大，采用线性振动理论显然是不够的，而必须从一般的方程组出发对它进行研究，其内容如下。

一般的纳维-斯托克斯方程为(1.4.6)式所示，即

$$\rho\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{V}}{\mathrm{D}t} = -\nabla P + \eta\nabla^2\boldsymbol{V} + (\zeta + \frac{\eta}{3})\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{V} \tag{13.1.2}$$

在(1.4.6)式中，我们将第二黏滞系数 μ' 用 $\varsigma - 2\eta/3$ 来表示，式中 ς 为体积黏滞系数，η 为切变黏滞系数。

连续性方程为

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{V} = 0 \tag{13.1.3}$$

以及能量守恒方程(热力学第一定律)为

$$\frac{\mathrm{D}Q}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t} + P\frac{\mathrm{D}\tau}{\mathrm{D}t} \tag{13.1.4}$$

式中，Q 为热量，U 为内能，τ 为体积，算符 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}$ 表示对时间 t 的流点导数，P 为压力。

对于液体的物态方程，我们仍假设压力只是密度的函数，即

$$P = P(\rho) \tag{13.1.5}$$

假设气泡为球形，并且只做径向运动，而运动只与 r 有关，即

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{i}_r u(r,t) \tag{13.1.6}$$

将上式代入(13.1.2)式和(13.1.3)式，应用微分几何中的单位矢量导数关系，容易得到

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r}\right) \tag{13.1.7}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right) = 0 \tag{13.1.8}$$

可以证明，只有径向振动的流体运动是无旋的。根据向量恒等式有 $\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{V} = \nabla\nabla\bullet\boldsymbol{V} - \nabla^2\boldsymbol{V}$，如果运动是无旋的，则有

$$\nabla^2\boldsymbol{V} = \nabla\nabla\cdot\boldsymbol{V} \tag{13.1.9}$$

容易证明，(13.1.6)式满足上式，这表明，它所描述的运动的确是无旋的。

现在来讨论边界条件。显然，在气泡的表面上，液体与气体的压力和法向速度应当连续，即当 $r=R$ 时，有

$$P_{\mathrm{b}} = P_l,\quad \dot{R}_{\mathrm{g}} = \dot{R}_l = \dot{R} \tag{13.1.10}$$

式中，下标 b，l 和 g 分别表示该量是属于气泡、液体和气体的。气泡内气态物质的压力包含液体的饱和蒸气压 P_{V} 和泡内气体的气压 P_{g}，即

$$P_{\mathrm{b}}(R,t) = P_{\mathrm{V}} + P_{\mathrm{g}} \tag{13.1.11}$$

P_{g} 的表达式见后面(13.2.9)式。而液体中的压力包含流体压力 P，黏滞应力所产生等效压力 P_{N}，以及液气界面上的表面张力 P_σ，或者

$$P_l(R,t) = P(R,t) + P_{\mathrm{N}} + P_\sigma \tag{13.1.12}$$

式中

$$P_\sigma = \frac{2\sigma}{R} \tag{13.1.13}$$

为表面张力，而

$$P_{\mathrm{N}}=-\eta\left(2\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\left(\zeta-\frac{2}{3}\eta\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2u}{r}\right) \tag{13.1.14}$$

正如上面指出的，(13.1.6)式所表示的运动是无旋的，故可以引入速度势的概念即定义为

$$\boldsymbol{u}=\nabla\varphi \tag{13.1.15}$$

这个式子代入(13.1.7)式和(13.1.8)式中，并将所得结果对 r 积分一次，于是有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2=-\int_{\infty}^{r}\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\mathrm{d}r+\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\int_{\infty}^{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla_r^2\varphi\right)\frac{\mathrm{d}r}{\rho} \tag{13.1.16}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\nabla_r^2\varphi=0 \tag{13.1.17}$$

式中

$$\nabla_r^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

在得到上面的式子时，曾假设速度势满足辐射条件，即在无限远处的 φ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ 为零。

应用物态方程(13.1.5)，可将连续性方程改写为

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial P}{\partial r}+\rho C_0^2\nabla_r^2\varphi=0 \tag{13.1.18}$$

式中，C_0 为声速，且有

$$C_0^2=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho} \tag{13.1.19}$$

原则上说，通过运动方程 (13.1.16)、连续性方程(13.1.18)和物态方程(13.1.5)能够将方程组化归只包含 φ 的微分方程，再应用边界条件(13.1.10)～(13.1.14)可以得到一个关于 R, $\dot{R}$ 和 $\ddot{R}$ 的方程，即

$$f\left(R,\dot{R},\ddot{R},t\right)=0 \tag{13.1.20}$$

也就是说，它可以化为关于气泡瞬时半径 R 的常微分方程来求解，无需再引入其他假设(更确切地说是限制)。但在实际上这样做是很困难的，因此在解决不同的问题时，不同的作者引入了各式各样的假设，并形成了各自的理论，这些理论中具

有代表性将分别在下面一一介绍。如果所作的假设与原问题是相适应的，则定解问题是合理的。反之，如果所作的假设与原问题有矛盾，则会使定解问题成为不合理。

13.2　不可压缩液体中的气泡振动

一定质量流体在运动中的体积不变，或者说在流动中密度不变，即

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=0$$

这样的流体称为不可压缩流体，利用连续性方程，容易将上式改写为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0 \tag{13.2.1}$$

代入运动方程和连续性方程分别得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{\rho}[P(\infty)-P(r,t)] \tag{13.2.2}$$

及

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=\frac{1}{C^2}\frac{\mathrm{D}P}{\mathrm{D}t}=0 \tag{13.2.3}$$

由(13.1.6)式和(13.2.1)式，可得

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2}{r}u=0$$

解之得

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}=\frac{A}{r^2}$$

当 $r=R, u=\dot{R}=U$ 时，于是有

$$\varphi=-\frac{R^2}{r}\dot{R}=-\frac{R^2}{r}U \tag{13.2.4}$$

式中，$R=R(t)$为气泡的瞬时半径。如将(13.2.4)式代入(13.2.2)式，容易得到

$$R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{P(R)-P(\infty)}{\rho_0} \tag{13.2.5}$$

因为不可压缩，故 $\rho=\rho_0$。式中 $P(R)$为气泡表面的压力，$P(\infty)$为离气泡中心无限远处流体中的压力。

1. 瑞利理论[2]

瑞利最早研究了空腔中是真空的这类空化问题，即 $P(R)$，且假定 $P(\infty)=P_0$，即无穷远处的压力等于静压力，也就是也说，他讨论的是忽略表面张力和黏滞力的真空泡。通过代入可知

$$U^2=\left(\frac{dR}{dt}\right)^2=\frac{2}{3}\frac{P_0}{\rho_0}\left(\frac{R_m^3}{R^3}-1\right)$$

满足(13.2.5)式，即它是(13.2.5)式的解。式中 R_m 为气泡开始坍缩时的(最大)半径。对上式再积分一次得到

$$\int_0^{\tau_c}dt=-\sqrt{\frac{3\rho_0}{2P_0}}\int_{R_m}^0 dR\Big/\left(\frac{R_m^3}{R^3}-1\right)^{1/2} \tag{13.2.6}$$

这里认为坍缩过程是从气泡的最大半径 R_m 开始一直坍缩到零，显然，在此过程中 $\dfrac{dR}{dt}<0$，故在上式右端取了负号，式中 τ_c 为坍缩时间，为了求出上面的积分，令

$$\left(\frac{R}{R_m}\right)^3=z$$

代入(13.2.6)式，容易得到

$$\tau_c=R_m\sqrt{\frac{3\rho_0}{2P_0}}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 z^{-1/6}(1-z)^{-1/2}dz \tag{13.2.7}$$

上式右端积分在数学上称为 β 函数，利用它与 Γ 函数的关系可得

$$\tau_c=R_m\frac{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\approx 0.915R_m\sqrt{\frac{\rho_0}{P_0}} \tag{13.2.8}$$

这个结果即为静压力 P_0 之下真空空腔的坍缩时间，首先为瑞利求得。

2. 普莱塞特、瑙尔汀克和尼皮拉斯、波里茨基理论[3~6]

如果空腔不是真空，而是充以气体和(或)蒸气，因此腔中的压力不为零。根据气体定律，腔中气体压力为

$$P_{\mathrm{g}}=P_{\mathrm{g}0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}=\left(P_0+\frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} \tag{13.2.9}$$

式中，γ 为多方指数，在等温过程中 $\gamma=1$，而在绝热过程中 γ 为气体的比热比。假设振动过程中液体和它的蒸气总是处于相平衡状态，其饱和蒸气压为 P_{V}，能够跟得上体积变化，于是气泡中的压力为气体压力与蒸气压力之和，即

$$\left(P_0+\frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}+P_{\mathrm{V}}=P(R,t)+\frac{2\sigma}{R}$$

这个结果表明，气体空腔中的压力等于液体中的压力与表面张力之和，由此可得液体压力为

$$P(R,t)=\left(P_0+\frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}+P_{\mathrm{V}}-\frac{2\sigma}{R} \tag{13.2.10}$$

在瑞利理论中，我们认为 $P(\infty)=P_0$，但如果有声场存在时，则

$$P(\infty,t)=P_0-P_{\mathrm{m}}\sin\omega t \tag{13.2.11}$$

将(13.2.10)式和(13.2.11)式代入到(13.2.5)式中，于是得到

$$\rho\left[R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]=\left(P_0+\frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}+P_{\mathrm{V}}-\frac{2\sigma}{R}-P_0+P_{\mathrm{m}}\sin\omega t \tag{13.2.12}$$

这即为瑙尔汀克(Noltingk)和尼皮拉斯(Neppiras)方程(简称 NN 方程)，式中 ω 为声场的角频率，P_{m} 为声压的振幅。如果进一步考虑切变黏滞对压力的贡献，则由(13.1.14)式和(13.2. 4)式(令 $\zeta=0$，即不考虑体积黏滞)可得

$$P_{\mathrm{N}}=4\eta\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} \tag{13.2.13}$$

于是在(13.2.12)式的右端还需加上 $-4\eta\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ 这一项。

应当提醒读者的是，(13.1.6)式和(13.2.1)式不能同时成立。因为一个不可压缩

的流体不可能只有径向运动，例如，我们讨论一个平均半径为 R_0 厚为 ΔR 的球壳的流点集合，当这个球壳中的流体产生扩张运动时，壳半径变成 $R_0+\Delta R_0$，为了满足流体是不可压缩的条件，即在流动中流体密度保持不变，则这个壳中的流体所占有体积保持不变，这就要求在扩张时的球壳厚度变薄；另外，由于限制了流点只能沿径向做球对称运动，任何流点只能沿以气泡中心为起点的径向上运动，而壳变薄则要求在径向上的流体或者受压，或者有部分流体作离开这个径向的运动，前者说明流体受压缩了，后者说明了流体在作非径向运动。由此可见，对于一种不可压缩的液体不可能只作纯径向的对称振动。

13.3 可压缩液体中的气泡振动

众所周知，只有当流动的马赫数很小时，流体才可以被认为是不可压缩的。根据上面最后一部分的分析可知，即使不可压缩的条件能够满足，它也不可能只作球对称的径向运动，这就促使许多作者努力取消不可压缩的假定。

1. 特里林-赫林-弗林理论[7~9]

不可压缩的假定实质上是排除了液体中有气泡的辐射声波，因为在这种介质中速度势满足的不是波传播方程而是拉普拉斯方程。为了去掉不可压缩这一限制，特里林(Trilling)-赫林(Herring)-弗林(Flynn)采取了两个措施：第一，在运动方程中去掉了 ρ 在流动中保持常数这个限制，在这个方程中保留了一个积分表示；第二，假设气泡振动时在液体中产生的速度势 φ 是一个发散传播的小振幅球面波，即 φ 满足

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+C_0\frac{\partial}{\partial r}\right)(r\varphi)=0 \tag{13.3.1}$$

式中，C_0 为小振幅波声速，即这里不考虑液体中声速的有限振幅效应。将这个结果代入(13.1.16)式和(13.1.18)式中，利用(13.1.15)式可以得到

$$\begin{aligned}&-ru\frac{\partial u}{\partial t}-ru^2\frac{\partial u}{\partial r}-C_0\frac{u^2}{2}+C_0ru\frac{\partial u}{\partial r}+C_0\int_{\infty}^{r}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\mathrm{d}r\\&+\frac{C_0}{\rho}r\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{r}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}=0\end{aligned} \tag{13.3.2}$$

为了使上面的方程组化归到气泡表面上来，令气泡表面上的压力和质点速度分别为 P 和 U，其流点导数分别为

$$\frac{\mathrm{D}P}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial P}{\partial t}+U\frac{\partial P}{\partial r} \tag{13.3.3}$$

$$\frac{\mathrm{D}U}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial r} \tag{13.3.4}$$

对(13.3.2)式进行一次梯度运算，将得到的式子和(13.1.18)式、(13.3.3)式以及(13.3.4)式联立，解出$\frac{\partial P}{\partial t},\frac{\partial P}{\partial r},\frac{\partial U}{\partial t},\frac{\partial U}{\partial r}$在 $r=R$ 时的表达式，再将所得结果代入(13.3.2)式中，最终得到

$$R\left(1-\frac{2U}{C_0}\right)\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}+\frac{3}{2}U^2\left(1-\frac{4}{3}\frac{U}{C_0}\right)=\frac{R}{\rho U}\left(\frac{U}{C_0}-\frac{U^2}{C_0^2}+\frac{U^3}{C_0^3}\right)\frac{\mathrm{D}P}{\mathrm{D}t}+\int_\infty^R\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\mathrm{d}r \tag{13.3.5}$$

此即为特里林首先导出的方程，但弗林应用类似的方法对相同的方程组，采取了相同的近似，却得到另一个方程：

$$R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{1}{\rho C_0^2}\frac{\mathrm{D}P}{\mathrm{D}t}R\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}-\frac{R}{\rho C_0}\frac{\mathrm{D}P}{\mathrm{D}t}=\int_\infty^R\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\mathrm{d}r \tag{13.3.6}$$

显然，这两个方程是不能化归同一个式子的，这就出现了矛盾。如果仔细分析一下这一理论，就不难看出产生这种矛盾的原因。事实上他们在推导过程中都假设液体中的速度势是以小振幅声速传播的发散球面波，即认为φ是线性波动方程的解，故辐射场是属于线性近似的。而气泡振动满足非线性方程，当在气泡表面上连接时，就出现了下述问题：非线性振动源辐射线性场的问题，故在气泡表面就会给非线性项带来强制性的忽略，对比一下(13.3.5)式和(13.3.6)式可知，它们差别也正是非线性项。另外，当$\frac{U}{C_0}>0.5$, (13.3.5)式中会出现负惯性问题。

假设$\frac{U^2}{C_0^2}<<1$，以及 $\rho=\rho_0$, $P(R,t)$中包括气体压力、蒸气压力、表面张力、黏滞应力和声压，应用(13.2.10)式、(13.2.11)式以及(13.2.13)式，可将(13.3.5)式写成

$$R\left(1-\frac{2U}{R_0}\right)\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{4}{3}\frac{U}{C_0}\right)\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{1}{\rho_0}\left[P_0-P_\mathrm{V}\right.$$
$$\left.-P_\mathrm{m}\sin\omega t+\frac{4\eta U}{R}+\frac{2\sigma}{R}-\left(P_0+\frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}\right]$$
$$-\frac{RU}{\rho_0C_0}\left(1-\frac{U}{C_0}\right)\frac{\mathrm{D}P}{\mathrm{D}t}=0 \tag{13.3.7}$$

此式称为特里林-赫林-弗林方程(简称 THF 方程)。

2. 柯克伍德-贝蒂、科尔-吉尔摩理论[10~15]

THF 理论中的(13.3.1)式实质中假设 $r\varphi$ 是以波速 C_0 传播，因为根据那个式子利用(1.9.10)式容易得到

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_{r\varphi}=C_0 \tag{13.3.8}$$

回忆一下有限振幅波的黎曼-厄恩肖解即可得到上述结论，式中 C_0 为小振幅声速。可以想象，当气泡做小振幅振动或者即使气泡做有限振幅振动，只要在离气泡足够远的地方，(13.3.1)式是近似正确的。而当气泡振动其马赫数较大时，在离气泡不太远的地方，必须要考虑辐射场的有限振幅效应，为此，柯克伍德(Kirkwood)和贝蒂(Bethe) (KB 假设)假设 $r\varphi$ 是以有限振幅波的速度 $C+u$ 传播，其中 C 是波在介质中传播的局部声速，u 是流点速度。根据(13.1.16)式忽略黏滞项，定义

$$\int_\infty^r\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\mathrm{d}r=h \tag{13.3.9}$$

人们容易得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-h-\frac{u^2}{2} \tag{13.3.10}$$

于是有 $-\dfrac{\partial}{\partial t}(r\varphi)=-r\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=r\left(h+\dfrac{u^2}{2}\right)$，因为 KB 假设认为 $r\varphi$ 以波速 $C+u$ 传播，故他们假设其对时间的导数也以波速 $C+u$ 传播，于是有

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(C+u)\frac{\partial}{\partial r}\right]\left[r\left(h+\frac{u^2}{2}\right)\right]=0 \tag{13.3.11}$$

通常将 $h+u^2/2$ 运动焓。这个式子表明，运动焓与 r 的乘积沿 $r+(C+u)t=$常数的特征线上以速度 $C+u$ 传播时，其形状不变。在运动方程中忽略了黏滞，但在边界条件中将把它计入。

在等熵过程中，流点的运动焓随时间的变化可以写成

$$\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t}=T\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}P}{\mathrm{D}t}=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}P}{\mathrm{D}t} \tag{13.3.12}$$

将这个关系代入运动方程(13.1.16)和连续性方程(13.1.18)，分别得到

$$\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}=-\frac{\partial h}{\partial r} \tag{13.3.13}$$

以及

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2u}{r}=-\frac{1}{C^2}\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t} \tag{13.3.14}$$

将这两个式子代入(13.3.11)式，并将全部偏导数量消去，应用边界条件能够得到

$$\begin{aligned}&R\left(1-\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3C}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2\\&=h\left(1+\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{1}{C}\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t}R\left(1-\frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)\end{aligned} \tag{13.3.15}$$

这个式子称为柯克伍德-贝蒂方程(KB 方程)。为了求解这个方程，必须知道 h 的表示式，为此，科尔(Cole)和吉尔摩(Gilmore)应用泰特方程

$$\frac{P+B}{P_\infty+B}=\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^n \tag{13.3.16}$$

作为物态方程，式中 P_∞ 和 ρ_∞ 分别为距离气泡中的很远处的压力和液体密度，对于水来说，$n=7$，$B=3000\mathrm{atm}$[①]。将(13.3.16)式用于(13.3.9)式，能够算出运动焓 h 为

$$h=\frac{n(P_0+B)}{(n-1)\rho_\infty}\left[\left(\frac{P+B}{P_\infty+B}\right)^{\frac{n-1}{n}}-1\right] \tag{13.3.17}$$

① $1\mathrm{atm}=1.01325\times10^5\,\mathrm{Pa}$，下同。

以及局部声速

$$C=C_0\left(\frac{P+B}{P_\infty+B}\right)^{\frac{n-1}{2n}} \tag{13.3.18}$$

忽略黏滞应力时，式中的$P(R)$及P_∞可分别用(13.2.10)式及(13.2.11)式来表示。如果考虑黏滞力在边界的影响，则在$P(R)$的表达式中加上(13.2.13)式的负值即可。而(13.3.15)式～(13.3.18)式即为克拉默(Cramer)和劳特博恩(Lauterborn)进行数值计算时的方程组。

近年来，人们应用气泡的有限振幅振动方程来研究气泡的声致发光机理，用得比较多的是所谓瑞利-普莱塞特型的方程，简称R-P方程，不同的作者写出的方程形式大同小异，它可以从(13.3.5)式～(13.3.7)式和(13.3.15)式所列的方程中取马赫数趋近于零的近似而求得，即

$$R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{R}{\rho C_0}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}+\int_\infty^R\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}\mathrm{d}r+F_v-\frac{2\sigma}{\rho R} \tag{13.3.19}$$

式中，F_v为黏滞修正项，为了寻求这个量，Poritsky 研究了不可压缩流体，假定在邻近于气泡表面的流体中，仅有径向运动存在，其径向主应力为常数，其他两个主应力相等，然后由边界条件来作黏滞修正，从而得到

$$F_v=-\frac{4\eta\dot{R}}{\rho R} \tag{13.3.20}$$

正如上面提到的，不可压缩的流体中不可能仅有径向运动。

3. 大马赫数情况下的气泡振动方程及其应用

到目前为止，几乎所有的文献都是应用(13.3.19)式作为基本方程，但从上面的讨论可知，方程(13.3.19)仅在马赫数很小时成立。在声致发光的情况下，发光气泡塌缩到最小半径时，它的马赫数很大(超过 1)，远远超过(13.3.19)式的应用范围。另外，(13.3.19)式还有一个不足之处，即 Poritsky 在作黏滞修正时，只考虑了切变黏滞系数，没有计及体积黏滞系数的影响。由声吸收的理论和实验结果可知，仅有单原子气体的体积黏滞系数为零，一般流体总是存在不为零的体积黏滞系数，例如，水的ζ近似为η的3倍，当气泡扩张时，尽管马赫数较小，但由于体积黏滞的影响，由此式算出的结果也不会与实验符合。考虑到这些因素，下面将导出更严格的气泡振动方程[16]。

设流体做径向运动(可以证明，这样的运动也是无旋的)，由(13.1.2)式和(13.1.3)式，运动、连续方程分别可写为

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}\right)=-\frac{\partial}{\partial r}\left[p-b\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2}{r}u\right)\right] \tag{13.3.21}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial r}+\rho\, C^2\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2}{r}u\right)=0 \tag{13.3.22}$$

$$\left.\begin{aligned} C^2&=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}\\ b&=\left(\zeta+\frac{4}{3}\eta\right)\end{aligned}\right\} \tag{13.3.23}$$

式中，η 为水的切变黏滞系数，ζ 为体积黏滞系数。作坐标和变量变换

$$r=R(t)+x,\quad t=\tau \tag{13.3.24}$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial t}=-\dot{R}(\tau)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \tau},\quad \frac{\partial}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial x}$$

以及

$$u=v+\dot{R}(t)$$

于是方程组成为

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial \tau}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\ddot{R}(\tau)\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{x+R(\tau)}u\right] \tag{13.3.25}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}+v\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\, C^2\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{x+R(\tau)}u\right]=0 \tag{13.3.26}$$

在气泡表面, $x=0,\ r=R(\tau)$，以及

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\quad v(R)=0,\quad \frac{\partial v(0,\tau)}{\partial \tau}=0$$

我们引入辐射方程。假设气泡辐射量 $r\varphi$ 为黎曼−厄恩肖波，即

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(C+u)\frac{\partial}{\partial r}\right](r\varphi)=0 \tag{13.3.27}$$

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=v(x,\tau)+\dot{R}(\tau)$$

根据(13.3.24)式对辐射方程(13.3.27)作坐标变换得到

$$\varphi(x,\tau)=-\frac{x+R(\tau)}{C+u}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+u[C+u-\dot{R}(\tau)]\right\} \tag{13.3.28}$$

定义

$$\int_{p(\infty,\tau)}^{p(x,\tau)}\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p\equiv h(x,\tau) \tag{13.3.29}$$

将运动方程(13.3.25)对 x 进行一次积分，积分限是(∞ , x)，由于无限远处的流体是静止的，故

$$\left.\frac{\partial\varphi(x,\tau)}{\partial x}\right|_{x=\infty}=\left.\frac{\partial\varphi(x,\tau)}{\partial\tau}\right|_{x=\infty}=0,\quad v(\infty,\tau)=0-\dot{R}(\tau)$$

并且在黏滞项中忽略密度的变化，于是得到

$$\frac{\partial\varphi(x,\tau)}{\partial\tau}=-h(x,\tau)+\frac{b}{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2}{x+R}\right)+\frac{1}{2}[\dot{R}^2(\tau)-v^2(x,\tau)] \tag{13.3.30}$$

合并(13.3.28)式和(13.3.30)式，消去 $\varphi(x,\tau)$，并在所得到的方程中令 $x=0$，利用连续性方程，以及

$$v(0,\tau)=0,\quad u(0,\tau)=\dot{R}(\tau),\quad \frac{\partial u}{\partial\tau}=\ddot{R}(\tau),\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{2}{R}\dot{R}-\frac{1}{\rho C^2}\frac{\partial p}{\partial\tau}$$

最终得到

$$\begin{aligned}&\left(1+Ma+\frac{1}{2}Ma^2+\frac{h(0,\tau)}{C^2}-\frac{b}{\rho^2C^3\dot{R}}\frac{\partial p}{\partial\tau}\right)R\ddot{R}+\frac{3}{2}\left[(1+Ma)\left(1+\frac{2}{3}Ma\right)+\frac{R}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial\tau}\right]\dot{R}^2\\&=\left[(1+Ma)(1+2Ma)-\frac{R}{C^2}\frac{\partial C}{\partial\tau}\right]h(0,\tau)+R(1+Ma)\frac{1}{C}\frac{\partial h(0,\tau)}{\partial\tau}-\frac{b}{\rho^2C^2}\\&\times\left\{\left[\frac{R}{C^2}\frac{\partial C}{\partial\tau}-Ma(1+Ma)-(1+Ma)^2\right]\frac{\partial p}{\partial\tau}-\rho C^2\frac{R}{C}(1+Ma)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{\rho C^2}\right)\frac{\partial p}{\partial\tau}\right\}\end{aligned} \tag{13.3.31}$$

这个式子即为修正的 R-P 方程。数值计算表明，“负惯性”现象消失。式中 $Ma=\dfrac{\dot{R}}{C}$ 为马赫数. 当 Ma 趋近于零时，ρ 和 C 皆不变，黏滞对惯性的贡献很小而可以忽略，惯性项 $R\ddot{R}$ 前的系数为 1。另外，由(13.3.29)式可得

$$h(0,\tau)\approx\frac{[p(0,\tau)-p(\infty,\tau)]}{\rho}$$

其中的 $p(0,\tau)$ 即为(13.2.10)式中的 $p(R,\tau)$，而 $p(\infty,\tau)$ 的表达式即为(13.2.11)式所示。

将这些结果代入(13.3.31)式，即可化归 R-P 类型的方程，只不过黏滞修正项成为

$$F_v=-\left(\frac{bR}{4\rho c^2\eta}\frac{\partial P}{\partial R}\right)\frac{4\eta\dot{R}}{\rho R} \tag{13.3.32}$$

这个结果表明，仅当上式的括弧中的量等于 1，才能化归 Poritsky 的黏滞修正(13.3.20)式。在 13.1 节的末我们讨论了流体的运动，认为在不可压缩流体中，不可能仅存在径向运动，这似乎表明，Poritsky 提出的“佯谬”不是由于 Navier-Stokes 方程所引起的，而是由于运动的连续性所要求的。当然，在一段时间内，气泡做径向运动的要求总是可以满足的，但这时就不能要求流体是**不可压缩**的。

为了进一步研究气泡振动，利用 Tait 方程作为水的物态方程，由(13.3.17)式和(13.3.18)式可以算出 $h(0,\tau)$ 和 C 以及它们的微商，而 $p(0,\tau)$ 及其微商可由(13.2.20)式求得。将它们代入(13.3.31)式后即可以进行数值计算[17]。

图 13.1 为水中空气泡的有限振幅振动图。频率为 26.5 kHz，声压 p_a=1.325 atm, R_0=4.5 μ m, C_0=1481 m/s, γ=1.4, 圆圈点符号是 Mie 散射数据(根据文献[18]的图 3a 中的数值重新作图)。 图中实线是由(13.3.31)式作数值计算的结果，计算时取全部黏滞 b=0.004 Pa • s，表面张力系数 σ=0. 072 N/m; 虚线是从 R-P 型方程(13.3.19)式作数值计算的结果。计算时取切变黏滞系数 η = 0.007 Pa • s, σ = 0 N/m(两者度是非正常值，图中用下标 abnorm 注明); 点划线是从 R-P 型方程(13.3.19)式作数值计算的结果，这里切变黏滞系数和表面张力系数取水的正常数据(图中用下标 norm 注明)η = 0.001 Pa • s, σ = 0.072 N/m。

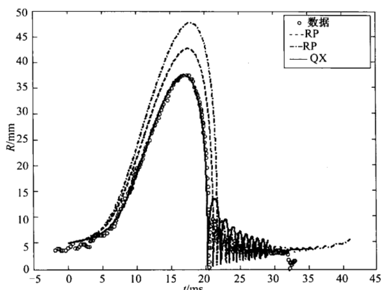


图 13.1 水中空气泡的有限振幅振动

而图 13.2 中，频率为 32.5 kHz，声压 p_a=1.45 atm，R_0=3 μ m，C_0=1481 m/s，γ=1.4，圆圈点符号是 Mie 散射数据(根据文献[19]的图 3a 中的数值重新作图)。图中实线是由(13.3.31)式作数值计算的结果，计算时取全部黏滞 b=0.004 Pa・s，表面张力系数 $\sigma = 0.072$ N/m;虚线是从 R-P 型方程(13.3.19)式作数值计算的结果。计算时切变黏滞系数和表面张力系数是取水的正常数据 $\eta = 0.001$ Pa・s，$\sigma = 0.072$ N/m。

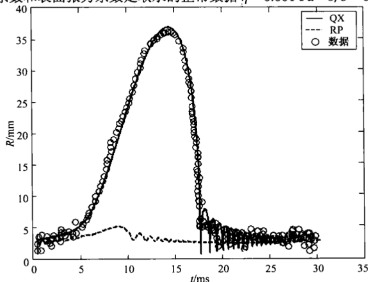


图 13.2 水中空气泡的有限振幅振动

由上述两个结果可见，修正了的气泡振动方程(13.3.31)其数值计算结果与实验数据符合得很好。

当液体中出现多个做大振幅振动的气泡时，每个气泡除了做大振幅振动外，它们之间有相互作用[20, 21]，这类问题的处理有待进一步探索。

参 考 文 献

[1] Minnert M. On the musical air-bubbles and the sound of running water. Phil Mag, 1933, 16: 235～248

[2] Rayleigh L. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. Phil Mag, 1917, 34: 94～98

[3] Plesset M S, Chapman R B. Collapse of an initially spherical vapor cavity in the neighbourhood of a solid boundary. J Fluid Mech, 1971, 47: 283~290

[4] Noltingk B E, Neppiras E A. Cavitation produced by ultrasonics. Proc Phys Soc London, 1950, B63: 674～685

[5] Noltingk B E, Neppiras E A. Cavitation produced by ultrasonics: theoretical conditions for the onset of cavitation. Proc Phys Soc London, 1951, B64: 1032～1038

[6] Poritsky H. The collapse or growth of a spherical bubble or cavity in a viscous fluid. *In*: Sternberg E.Proceedings of the first U S National Congress on Applied Mechanics. New York, 1952. 813

[7] Trilling L. The collapse and rebound of a gas bubble. J Appl Phys, 1952, 23: 14~17

[8] Flynn H. Cavitation dynamics. I. a mathematical formation. Jour Acoust Soc Am, 1975, 57: 1379～1396

[9] Flynn H. Cavitation dynamics. II. free pulsations and models for cavitation bubbles. Jour Acoust Soc Am, 1975, 58: 1160～1170

[10] Girmore F R.The growth of collapse of a spherical bubble in a viscous compres-sible flu1d.Calif Inst Tech Rept, 1952

[11] Keller J B, Miksis M. Bubble oscillations of large amplitude. Jour Acoust Soc Am, 1980, 68: 628～633

[12] Knapp R T, Daily J W, Hamitt F G. Cavitation. New York: McGraw Hill, 1970

[13] Lastmann G J, Wentzell R A. Perturbation corrections to the equation of radial motion of a cavitating spherical bubble in an inviscid compressible liquid. Jour Acoust, Soc Am, 1981, 70: 596～602

[14] Lastmann G J, Wentzell R A. On two equations of radial motion of a spherical gas-filled bubble in a compressible liquid. Jour Acoust Soc Am, 1982, 71:835～838

[15] Lauterborn W.Cavitation and inhomogenities. New York: Springer-Verlag, 1980

[16] Qian Z W, Xiao L. Finite-amplitude vibration of a bubble. Chinese Physics Letters, 2003, 20: 80～82

[17] Qian Z W, Xiao L. Finite-amplitude vibration of a bubble in water. Chinese Physics B, 2008, 17: 3785～3791

[18] Hiller R, Putterman S J, Barber B P. Light scattering measurements of the repetitive supersonic implosion of a sonoluminescing bubble. Phys Rev Lett, 1992 , 69: 3839～3842

[19] Löfstedt R, Weninger K, Putterman S, et al. Sonoluminescing bubbles and mass diffusion. Phys Rev E, 1995 , 51: 4400～4410

[20] Qian Z W. The effect of a boundary on a collapsing bubble. Proc China-Japan Joint Conference on Ultrasonics, Nanjing, 1987. 175～178

[21] Qian Z W. Jet formation of a bubble in a cavitation field, Nonlinear acoustics at the turn of the millennium. *In*: Lauterborn W, Kurz T. ISNA 15. Göttingen: AIP Conference Proceedings, 1999, 367～370

第 14 章　非线性参数及其在医学超声中的应用

14.1　非线性参数的热力学理论[1~5]

从第 1 章可知，对于一个单相均匀系的介质来说，其物态方程有两个独立变元，例如，介质中的压力 P 可表示为密度 ρ 和熵 S 的函数，即

$$P = P(\rho, S) \tag{14.1.1}$$

设介质中的声传播过程是等熵的，正如在第 3 章中讨论过，即使在介质中形成冲击波，只要其间断值不太大，等熵假设依然有效。于是在等熵情况下，可以将压力展成如下的级数

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S,0} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right) + \frac{1}{2} \rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{S,0} \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2 + \cdots \\ &= P_0 + A \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} + \frac{1}{2} B \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right)^2 + \cdots \end{aligned} \tag{14.1.2}$$

式中

$$A = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{S,0} = \rho_0 C_0^2, \quad B = \rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} \right)_{S,0} = \rho_0^2 \left(\frac{\partial C^2}{\partial \rho} \right)_{S,0} \tag{14.1.3}$$

定义一个量

$$\frac{B}{A} = \rho_0 C_0^{-2} \left(\frac{\partial C^2}{\partial \rho} \right)_{S,0} = \frac{\partial (C^2 / C_0^2)}{\partial (\rho / \rho_0)} \tag{14.1.4}$$

正如在第 1 章中指出的，这个量称为(二阶)非线性参数，从(14.1.1)式可知，可以选取独立变数为(P, S)，于是有

$$\rho = \rho(P, S)$$

将它代入(14.1.4)式可得

$$\frac{B}{A}=\rho\, C_0^{-2}\left(\frac{\partial C^2}{\partial\rho}\right)_{S,0}=\rho C_0^{-2}\left(\frac{\partial C^2}{\partial P}\right)_{S,0}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_{S,0} \tag{14.1.5}$$

非线性参数是非线性声学中重要的物理量，近年来它在超声医学诊断及生物声学上出现了可喜的应用前景，因而必须对它进行精确测量和深入研究。到目前为止，有下述几种研究方法，即热力学方法、有限振幅声波法和非线性参数成像法，这一节只讨论热力学方法，其他方法将在以后的两节中分别加以讨论。

测量 B/A 的热力学方法可以由(14.1.5)式直观地看出，即如果知道 $\rho_0 C_0$，再设法测出声速 C 在等熵过程中随压力 P 的变化即可。但是由于声速随压力的变化颇不敏感，要想测出 C 有可观察的变化，则要求压力改变很大，这在实际测量中是很不方便的。

(14.1.5)式中 C 对 P 的导数是在等熵过程中进行的，也可以通过变元的选择化为等温过程的量，例如，选 P, T 为独立变元，可将 C 和 S 表示为

$$C=C(P,T),\qquad S=S(P,T)$$

于是有

$$\mathrm{d}C=\left(\frac{\partial C}{\partial T}\right)_P\mathrm{d}T+\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_T\mathrm{d}P \tag{14.1.6}$$

$$\mathrm{d}S=\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P\mathrm{d}T+\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)\mathrm{d}P_T \tag{14.1.7}$$

如果取 $C=C(P,S)$，则有

$$\mathrm{d}C=\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_S\mathrm{d}P+\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)_P\mathrm{d}S$$

将 $\mathrm{d}S$ 的表示式代入上式得到

$$\mathrm{d}C=\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_S\mathrm{d}P+\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)_P\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P\mathrm{d}T+\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T\mathrm{d}P\right]$$

令这个结果与(14.1.6)式相等，由于 P,T 是独立变量，故要求 $\mathrm{d}P$ 和 $\mathrm{d}T$ 前的系数相等，因此有

$$\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_S=\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_T-\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)_P\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \tag{14.1.8}$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)_P=\left(\frac{\partial C}{\partial T}\right)_P\Big/\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \tag{14.1.9}$$

将(14.1.9)式代入(14.1.8)式，应用热力学恒等式(1.9.6)式和(1.9.11)式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T=-\frac{1}{\rho_0}\alpha,\quad T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P=C_P$$

于是得到

$$\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_S=\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_T+\frac{\alpha T}{\rho_0 C_P}\left(\frac{\partial C}{\partial T}\right)_P$$

显然，其中的$\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_S$实为(14.1.5)式中的$\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_{S,0}$，将上式代入(14.1.5)式可得

$$\frac{B}{A}=2\rho_0 C_0\left(\frac{\partial c}{\partial P}\right)_T+\frac{2\alpha C_0 T}{C_P}\left(\frac{\partial C}{\partial T}\right)_P \tag{14.1.10}$$

式中，α 为热膨胀系数，C_P 为定压比热。这个式子表明，如果知道介质的 ρ_0, C_0, α 和 C_P，以及测出等温过程中声速随压力的变化和在定压过程中声速随温度的变化，即可由(14.1.10)式算出非线性参数 B/A。如将(14.1.10)式中的第一项和第二项分别写为 $(B/A)'$ 和 $(B/A)''$，在表 14.1 中列出了水的 B/A 值与温度以及压力的关系[1,2]。由表中的数值容易看出，$(B/A)'$ 是主要的，$(B/A)''$ 很小，即(14.1.10)式中的第二项的贡献比第一项小得多。另外，随着温度的上升，B/A 增大；当温度一定时，随着压力增加 B/A 有极大值。

如果根据(14.1.5)式测量 B/A 的值，则要求过程是等熵的，而借助于仪表来监视过程是否为等熵是困难的。而根据(14.1.10)式来测量 B/A 只要求等温过程和定压过程，这对于仪表监视是容易实现的，但缺点是要预先对介质的定压比热和热膨胀系数作专门测量，这两个量不易测得精确，因而为进一步实际应用带来不便。

另一个测量方法[5]是，将声速为 C 的待测样品充满在发射和接收换能器之间，设两个换能器保持固定距离为 d，假设脉冲声波从一个换能器到另一个换能器的传播时间为 t，则有 $C=d/t$，于是有

$$\left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_{S,0}=-\frac{d}{t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial P}\right)_{S,0} \tag{14.1.11}$$

将这个式子代入(14.1.5)式，并近似地用 $(\Delta t/\Delta P)_{S,0}$ 代替微商式，于是有

$$\frac{B}{A}=-\frac{2\rho_0 C_0^2}{t}\left(\frac{\Delta t}{\Delta P}\right)_{S,0} \tag{14.1.12}$$

表14.1 水的B/A值与温度以及压力的关系

T/℃ \ P/(kg/cm^2)	1	250	500	1000	1500	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
0° $(B/A)'$	4.11	4.48	5.46	6.15	6.39	6.53	6.57	6.40	6.28	6.45				
$(B/A)''$	-0.03	0.06	0.12	0.20	0.25	0.25	0.23	0.20	0.16	0.12				
(B/A)	4.08	4.90	5.58	6.35	6.64	6.78	6.80	6.60	6.44	6.57				
30° $(B/A)'$	5.06	5.26	5.44	5.62	5.76	5.86	5.98	6.01	5.97	5.90	5.81			
$(B/A)''$	0.15	0.17	0.19	0.21	0.22	0.22	0.21	0.18	0.16	0.15	0.19			
(B/A)	5.21	5.43	5.63	5.83	5.98	6.08	6.19	6.19	6.14	6.06	6.00			
40° $(B/A)'$	5.34	5.43	5.51	5.64	5.73	5.80	5.89	5.89	5.86	5.79	5.72	5.67	5.63	
$(B/A)''$	0.15	0.16	0.18	0.20	0.20	0.20	0.19	0.17	0.16	0.15	0.13	0.12	0.11	
(B/A)	5.49	5.59	5.69	5.84	5.93	6.00	6.08	6.06	6.02	5.94	5.85	5.79	5.74	
50° $(B/A)'$	5.43	5.49	5.54	5.63	5.70	5.76	5.80	5.81	5.79	5.75	5.67	5.61	5.50	5.32
$(B/A)''$	0.12	0.13	0.15	0.17	0.17	0.17	0.17	0.16	0.14	0.12	0.08	0.07	0.06	0.04
(B/A)	5.55	5.62	5.69	5.80	5.87	5.93	5.97	5.97	5.93	5.87	5.75	5.68	5.56	5.36
60° $(B/A)'$	5.54	5.60	5.64	5.69	5.72	5.74	5.73	5.70	5.66	5.62	5.54	5.55	5.49	5.50
$(B/A)''$	0.07	0.10	0.11	0.14	0.14	0.14	0.15	0.13	0.11	0.08	0.08	0.05	0.03	0.02
(B/A)	5.61	5.70	5.75	5.83	5.86	5.88	5.88	5.83	5.77	5.70	5.62	5.60	5.52	5.52
80° $(B/A)'$	5.57	5.78	5.81	5.80	5.78	5.75	5.76	5.58	5.53	5.50	5.47	5.44	5.33	5.11
$(B/A)''$	-0.01	0.01	0.03	0.06	0.07	0.07	0.07	0.06	0.05	0.04	0.06	0.06	0.04	0.01
(B/A)	5.74	5.79	5.84	5.86	5.85	5.82	5.74	5.64	5.58	5.54	5.53	5.50	5.37	5.12

这个式子表明，如果能测出传播时间 t 和等熵过程中的 $(\Delta t/\Delta P)_{S,0}$，则可以测出 B/A，其中的 $(\Delta t/\Delta P)_{S,0}$ 表示在等熵过程中介质中压力的增加引起的声波传播时间的增加。通过相位比较法测出 Δt，用压力传感器测出压力的变化量 ΔP，假设过程是等熵的，这样，B/A 即可从(14.1.12)式算出。利用这种方法测量几种介质的 B/A 值见表 14.2。

表 14.2 几种液体的 B/A 值

液体名称	$\rho_0/(g\cdot cm^3)$	$C_0/(m/s)$	B/A (25℃)
蒸馏水	0.995	1509	5.11±0.20
四氯化碳	1.002	1519	7.85±0.31
(正)乙烷(Hexane)	0.685	1284	9.81±0.39
甘油(4%的水)	1.239	1899	8.58±0.34
甘醇(ethylene glycol)	1.110	1658	9.88±0.40
牛血清蛋白	0.20		6.23±0.25

将这个表中蒸馏水的 B/A 值与表 14.1 中温度相近的对应值比较，结果非常接近，这是很自然的，因为等熵过程与等温过程的 B/A 值之最大差值不超过 $(B/A)''$，而后一个值是非常小的。

14.2 测量非线性参数的有限振幅声波法[6~17]

由 14.1 节可以知道，几种热力学方法，能够得到较为接近的非线性参数测量值，这给超声医学提供有用的参数，但由于它只能测量样品的数值，故还不能用于医院门诊，要想对人体活组织进行检查，有限振幅声波法是目前行之有效的方法。这种方法是对样品或人体组织发射一个角频率为 ω 的声波，接收它的二阶谐波声场，利用后者与非线性系数 $\beta=1+B/2A$ 成正比这一性质，从而求出 B/A。

由第 2 章的理论可知，不计样品的声吸收，在冲击波形成距离以内，有限振幅声波场可用富比尼解来表示，亦即是说，如果声源发射声波时其表面振动速度(表面半径为 R_0)为

$$u=u_0\sin\omega\left(t-\frac{R_0}{C_0}\right)$$

时，它在介质中距离声源中心为 x 的地方产生的二阶谐波声场为

$$u^{(2)} = 2u_0 \frac{J_2(2\sigma)}{2\sigma} \sin 2\omega\left(t - \frac{x}{C_0}\right)$$
$$\approx \frac{1}{2} u_0 \sigma \sin 2\omega\left(t - \frac{x}{C_0}\right) \tag{14.2.1}$$

相应的二阶声压为

$$p^{(2)} \approx \frac{1}{2}\rho_0 \beta k u_0^2 \cdot x \sin 2\omega\left(t - \frac{x}{C_0}\right) = P_0^{(2)} \sin 2\omega\left(t - \frac{x}{C_0}\right)$$

$$P_0^{(2)} = \frac{\beta\omega}{2\rho_0 c_0}\left[P_0^{(1)}\right]^2 x \tag{14.2.2}$$

式中，k 为波数，$P_0^{(1)}$ 为一阶声压振幅，$P_0^{(2)}$ 为二阶声压振幅，C_0 为小振幅声速，β 为非线性系数，且等于$1+B/2A$，由(14.2.2)式可得

$$\frac{B}{A} = \frac{2\rho_0 C_0^3 P_0^{(2)}(x)}{\pi f x\left[P_0^{(1)}(0)\right]^2} - 2 \tag{14.2.3}$$

式中，$P_0^{(2)}(x)$ 为在 x 点测出的二阶压力振幅，而 $P_0^{(2)}(0)$ 表示在发射换能器表面附近的一阶压力振幅，它等于 $\rho_0 C_0 u_0$。(14.2.3)式表明，如果在样品中测出 $P_0^{(2)}(x)$ 和 $P_0^{(1)}(0)$，以及 ρ_0, C_0，则样品的 B/A 即可得到。

一种方法是根据(14.2.3)式应用比较法测量了几种生物介质的 B/A。首先测出参考液体(如除了气的蒸馏水)中二阶谐波的压力振幅 $P_0^{(2)}$，如果这种液体的非线性参数表示为 $(B/A)_0$，密度与声速三次方的乘积表为 $(\rho C^3)_0$。若将介质换成生物介质，相应的量分别表示为 $P_x^{(2)}, (B/A)_x$ 和 $(\rho C^3)_x$，应用(14.2.3)式，在测量中保持一阶声压振幅不变，于是得到

$$\left(\frac{B}{A}\right)_x = \frac{P_x^{(2)}}{P_0^{(2)}} \frac{(\rho C^3)_x}{(\rho C^3)_0}\left[\left(\frac{B}{A}\right)_0 + 2\right] - 2 \tag{14.2.4}$$

实验中声源的频率是几兆赫。

众所周知，富比尼解未曾考虑介质本身的吸收影响，而大多数生物介质的吸收很大，因此必须对此进行修正。

因为是在冲击波形成距离以内，故可以不必考虑由于有限振幅效应所引起的额外吸收，即认为二阶谐波本身只受到通常的小振幅吸收(如只遭受到对应于该频

率下的黏滞、热传导或者弛豫吸收等)，这相当于假设基波的能量不断地向二阶谐波转移，而二阶谐波的能量不再向更高阶谐波转移，它的能量衰减只是小振幅吸收，根据这个观点，容易得到微分方程

$$\frac{\mathrm{d}P^{(2)}(x)}{\mathrm{d}x}=\left(1+\frac{B}{2A}\right)\frac{\omega}{2\rho_0C_0^3}\left\{P^{(1)}(x)\right\}^2-\alpha_2P^{(2)}(x) \tag{14.2.5}$$

式中，右端第一项为基波所激励的二阶谐波项，它可以从(14.2.2)式所表示的富比尼解给出，而第二项为二阶谐波的小振幅吸收项，$P^{(1)}(x)$ 为基波声压振幅，它可写为

$$P^{(1)}(x)=P^{(1)}(0)\mathrm{e}^{-\alpha_1x} \tag{14.2.6}$$

α_1,α_2 分别为基波和二阶谐波的小振幅吸收系数。(14.2.5)式是伯努利型方程，它的解容易得到，即

$$\begin{aligned}P^{(2)}(x)&=\frac{\left(1+\frac{B}{2A}\right)\omega}{2\rho_0C_0^3}\left\{P^{(1)}(0)\right\}^2\frac{\mathrm{e}^{-\alpha_2x}-\mathrm{e}^{-2\alpha_1x}}{2\alpha_1-\alpha_2}\\&=\frac{\left(1+\frac{B}{2A}\right)\omega}{2\rho_0C_0^3}\left\{P^{(1)}(0)\right\}^2\frac{\sinh\left(\alpha_1-\frac{\alpha_2}{2}\right)x}{\alpha_1-\frac{\alpha_2}{2}}\mathrm{e}^{-\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}\right)x}\end{aligned}$$

当 $\left(\alpha_1-\frac{\alpha_2}{2}\right)^2x^2<<1$ 时，上式可简化为

$$P^{(2)}(x)=\frac{\left(1+\frac{B}{2A}\right)\omega}{2\rho_0C_0^3}x\cdot\mathrm{e}^{-\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}\right)x} \tag{14.2.7}$$

以上所讨论的内容都认为声源发射平面波，如果声源具有某种指向性，如一个有限大小的平面活塞声源，这时的一阶场显然不是平面波，于是上面的结果还要作些修正。根据熟知的英格尼托(Ingenito)和威廉斯(Williams)理论，(14.2.7)式应改写为

$$P^{(2)}(x)=\frac{\left(1+\frac{B}{2A}\right)\omega}{2\rho_0C_0^3}F(x)\mathrm{e}^{-\left(\alpha_1+\frac{\alpha_2}{2}\right)x} \tag{14.2.8}$$

$F(x)$ 称为换能器的修正因子，当活塞发射器的半径 a 比声波波长大很多时，$F(x) \approx x$，在 $x \sim a$ 量级的距离上，$F(x)/x$ 几乎接近于某个常量。

如果样品厚度为 d，而声源与接收器之间的距离为 L，且有 $L > d$，设样品与水的声阻抗差别不大，为简单起见，设接收器紧贴着样品，可以算得

$$\left(\frac{B}{A}\right)_x = \left[\frac{P_x^{(2)}}{P_0^{(2)}}\frac{L}{dD'D''} - \frac{L}{d} + 1\right]\frac{(\rho C^3)_x}{(\rho C^3)_0}\frac{\left(\frac{B}{A}\right)_0 + 2}{D''} - 2$$

式中

$$D' = \frac{2(\rho C^3)_0}{(\rho C^3)_0 + (\rho C^3)_x}$$

$$D'' = \frac{2(\rho C^3)_x}{(\rho C^3)_0 + (\rho C^3)_x}$$

更一般的情况是计及介质吸收、样品绕射等影响的工作。

14.3 非线性参数成像法[18,19]

根据上面的讨论可知，B/A 是描写介质非线性性质的一个特征参数，它在声学中所起的作用应该能够与吸收系数和特性阻抗等参数相提并论，故人们自然会想起用它来进行超声成像。当声波通过介质时，由于压力变化 ΔP，则温度变化了 ΔT，于是声速可表示为

$$C(P,S) = C_0' + \left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_S \Delta P + \left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)_P \Delta S = C_0'' + \left(\frac{\partial C}{\partial P}\right)_S \Delta P$$

式中，C_0'' 为静压力条件下的声速，利用(14.1.5)式，并且近似地认为 $C_0'' \approx C_0$，故有

$$C \approx C_0 + \frac{1}{2\rho_0 C_0}\frac{B}{A}\Delta P \tag{14.3.1}$$

此式表明，声压 ΔP 使得介质中的局部声速 C 发生了变化，而且这个变化是正比于介质的非线性参数。由于 C 的变化，局部波数也发生变化，即

$$k = \frac{\omega}{C} \approx \frac{\omega}{C_0}\left(1 - \frac{1}{2\rho_0 C_0}\frac{B}{A}\Delta P\right) \tag{14.3.2}$$

这就使得声波在这种介质中传播一段距离 Δx 之后得到一个相移为

$$\Delta\phi = -\omega N \Delta P \Delta x \tag{14.3.3}$$

式中

$$N = \frac{B/A}{2\rho_0 C_0} \tag{14.3.4}$$

在实际情况中，将压力变化 Δp 看成是由某个称为泵波换能器产生的声压 Δp_{pump} 与另一个被称为探测换能器产生的声压 Δp_{probe} 的和，即

$$\Delta p = \Delta p_{\text{pump}} + \Delta p_{\text{probe}}$$

如果使用的泵波压力非常强，则(14.3.3)式可近似地表示为

$$\Delta\phi = -\omega N \Delta P_{\text{pump}} \Delta x \tag{14.3.5}$$

通常选泵波是脉冲波，探测波是连续波，故波的相位受到泵波的脉冲式的调制。设泵波是平面波，即

$$\Delta p_{\text{pump}}(x, y, z, t) = \alpha f\left(t - \frac{x}{C_0}\right) \tag{14.3.6}$$

式中，α 为常数。一般说来，(14.3.4)式中的 N 也是位置的函数，即 $N = N(x, y, z)$，若探测波的频率足够高，以使得其波束很窄，在波束宽度内，N 只是 x 的函数，即 $N = N(x)$。将这些结果代入(14.3.5)式，近似地有

$$\Delta\varphi(x, y, z, t) \approx \Delta\varphi(x, t) = -\alpha\omega N(x) f\left(t - \frac{x}{C_0}\right)\Delta x \tag{14.3.7}$$

如果在 $x = x_0$ 处有一个接收换能器，并且在发射换能器之间填充上述介质，令

$$x = x_0 - C_0 t$$

于是在 x_0 处接收到的调相波的相移为

$$\delta\phi(x_0,t)=-\alpha\omega\int_0^{x_0}N(x)f\left(\frac{x_0-2x}{C_0}\right)\mathrm{d}x$$
$$=-\alpha\omega\int_0^{x_0}N(x)g\left(\frac{x_0}{2}-x\right)\mathrm{d}x$$
$$=-\alpha\omega M\left(\frac{x_0}{2}\right) \tag{14.3.8}$$

式中，$M(x_0/2)$ 为 $N(x)$ 与 $g(x)$ 的卷积，即

$$M\left(\frac{x_0}{2}\right)=\left[N(x)*g(x)\right]_{x=\frac{x_0}{2}} \tag{14.3.9}$$

通过傅里叶变换容易求得

$$N(x)=-\frac{1}{\alpha\omega}F^{-1}\left\{\frac{F\left[\delta\phi(x)\right]}{F\left[g(x)\right]}\right\} \tag{14.3.10}$$

即通过解卷积技术可以求出非线性参数。

14.4 非线性参数的混合规则[20]

以上讨论的介质只包含单一元素成分，或者用热力学的术语来说，称为单元均匀系。现在来讨论介质是两种成分组成的复合介质，它的两种成分是不能互溶的。对于复合介质来说，其线性力学范围的量如等效密度 $\bar{\rho}$，等效压缩率 $\bar{\kappa}$ 与各个成分的对应量 ρ_i，$\bar{\kappa}_i(i=1,2)$，满足线性相加关系，即

$$\bar{\rho}=\rho_1 n_1+\rho_2 n_2 \tag{14.4.1}$$

$$\bar{\kappa}=\kappa_1 n_1+\kappa_2 n_2 \tag{14.4.2}$$

式中，$n_i(i=1,2)$ 为第 i 种成分的体积分数，且有

$$n_i=\frac{V_i}{V_1+V_2},\quad i=1,2 \tag{14.4.3}$$

式中，V_i 为第 i 种成分所占的体积。如果定义质量分数

$$m_i=\frac{M_i}{M_1+M_2}=\frac{M_i}{M},\quad i=1,2 \tag{14.4.4}$$

式中，M_i 为第 i 种成分的质量，必有

$$\frac{1}{\bar{\rho}}=\frac{V}{M}=\frac{V_1+V_2}{M}=\frac{m_1}{\rho_1}+\frac{m_2}{\rho_2} \tag{14.4.5}$$

式中，$M=M_1+M_2$。正如以前各章一样，假设过程是等熵的，于是有

$$\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{\rho}\right)=-\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_S=-\frac{1}{\rho^2C^2} \tag{14.4.6}$$

将这个规则用于(14.4.5)式，由于压力的改变不会引起质量分数的改变，故对(14.4.5)式两端对 P 求导，容易得到

$$左端=\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{1}{\bar{\rho}}\right)=-\frac{1}{\rho^2\bar{C}^2}$$

$$右端=-m_1\frac{1}{\rho_1^2C_1^2}-m_2\frac{1}{\rho_2^2C_2^2}$$

于是有

$$\frac{1}{\bar{\rho}^2C^2}=\frac{m_1}{\rho_1^2C_1^2}+\frac{m_2}{\rho_2^2C_2^2} \tag{14.4.7}$$

根据压缩率的定义可知

$$\kappa=-\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)=\frac{1}{\rho C^2} \tag{14.4.8}$$

代入(14.4.7)式便有

$$\bar{\kappa}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\bar{\rho}m_i\bar{\kappa}_i}{\rho_i}=\sum_{i=1}^{2}\frac{V_i}{V_1+V_2}\bar{\kappa}_i=\sum_{i=1}^{2}n_i\bar{\kappa}_i \tag{14.4.9}$$

这个结果与(14.4.2)式一致。这个关系可以推广到 n 种成分。

下面我们要探讨一下非线性量 B/A 的混合规则究竟如何？为此，我们将(14.4.6)式对 P 再求导，于是有

$$\frac{\partial^2}{\partial P^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{2}{\rho^3C^4}\left(1+\rho C\frac{\partial C}{\partial P}\right)$$

应用 B/A 的关系式(14.1.5)，上式成为

$$\frac{\partial^2}{\partial P^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{2}{\rho^3 C^4}\left(1+\frac{B}{2A}\right)=\frac{2}{\rho^3 C^4}\beta \tag{14.4.10}$$

上式中 β 为介质的非线系数，它与非线性参数 B/A 有如下的关系

$$\beta=1+\frac{B}{2A} \tag{14.4.11}$$

由于质量分数 m_i 不随 P 的变化而变化，故将(14.4.5)式的两端对 P 求二次导数，容易得到非线性系数 β 的混合规则

$$\overline{\kappa}^2\overline{\beta}=n_1\kappa_1^2\beta_1+n_2\kappa_2^2\beta_2 \tag{14.4.12}$$

由此可见，复合介质的非线性系数 $\overline{\beta}$ 等于两个组成介质成分的 β_i 的权重相加，其加权系数为

$$n_i\left(\frac{\kappa_i}{\overline{\kappa}}\right)^2$$

显然，这个关系推广到任意个成分皆成立。

正如前面所指出的，B/A 是描述物质性质的一个特征参数，可以用于声检测。另外，准确到二阶量，ρC，B/A 足以描述介质的声学特性，如果进一步考虑声学的高阶非线性，并将宏观参数与液体的物质结构参数联系起来，可以将各阶非线性参数与液体的分子结构联系起来，使得非线性声学方法能够被用来研究物质结构。

14.5　三阶非线性参数[21,22]

众所周知，微扰法是研究非线性问题的一种有效方法，它可以将非线性方程简化为各阶的非齐次线性方程来求解。以上我们仅准确到二阶非线性问题，较为深入地讨论了二阶非线性参数，从而使声检测又增加了一个新的信息参数。由第 2 章内容我们已经知道，尽管富比尼解在形式上包含大于二阶的解，但由于它是从黎曼-厄恩肖解出发并且取了二级近似，故高于二阶的解是不准确的，因而不能由它来推出三阶或三阶以上的解。为了获得更多的信息来源，下面我们将从理想流体中的 Lighthill 方程出发来讨论三阶非线性问题。

由(8.1.16)式得

$$\nabla^2\rho - \frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} = -\frac{1}{C_0^2}\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \tag{14.5.1}$$

式中

$$T_{ij} = p + \rho v_i v_j - c_0^2\rho\delta_{ij} \tag{14.5.2}$$

对于没有化学反应的介质，压力依赖于密度和熵，如果过程是等熵的，则压力可以展成如下的形式，即

$$P = P_0 + A\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\right) + \frac{1}{2}B\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\right)^2 + \frac{1}{6}C\left(\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\right)^3 + \cdots \tag{14.5.3}$$

式中 A, B 如(14.1.3)式所示，而

$$C = \rho_0^3\left(\frac{\partial^3 P}{\partial\rho^3}\right)_{S,0} \tag{14.5.4}$$

而将 C/A 称为三阶非线性参数。将三个场量展成微扰级数，即

$$P = \sum_I P^{(I)},\quad \rho = \sum_I \rho^{(I)},\quad v = \sum_I v^{(I)},\quad T_{ij} = \sum_I T_{ij}^{(I)} \tag{14.5.5}$$

式中，I 为场的阶数。当 I=0 时，$P^{(0)}=P_0$、$\rho^{(0)}=\rho_0$ 分别为大气压力、平衡密度，相应的波动方程为

$$\nabla^2\rho^{(I)} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\rho^{(I)}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 T_{ij}^{(I)}}{\partial x_i \partial x_j} \tag{14.5.6}$$

$$\begin{gathered} T_{ij}^{(I)} = [p^{(I)} - c_0^2\rho^{(I)}]\delta_{ij} + R_{ij}^{(I)} \\ R_{ij}^{(I)} = \sum_{m,n,l}\rho^{(m)}v_i^{(n)}v_j^{(l)} \\ m+n+l=I \end{gathered} \tag{14.5.7}$$

对于一维波，当 I=1, (14.5.6)式为齐次波动方程，其一阶场分别为

$$
\begin{aligned}
&\rho^{(1)}(x,t)=w\sin(\omega t-k\dot{x})=W\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kx)}+\text{共轭量}\\
&v^{(1)}(x,t)=\frac{c_0}{\rho_0}w\sin(\omega t-kx)=\frac{c_0}{\rho_0}W\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kx)}+\text{共轭量}\\
&p^{(1)}(x,t)=c_0^2\rho^{(1)}(x,t)=c_0^2W\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-kx)}+\text{共轭量}\\
&W=\frac{w}{2\mathrm{j}}
\end{aligned}
\tag{14.5.8}
$$

当 $I=2$ 时，由(14.5.2)式~(14.5.5)式和(14.5.7)式，二阶量为

$$
\begin{aligned}
&p^{(2)}=c_0^2\rho^{(2)}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial\rho^2}\right)_0\left[\rho^{(1)}\right]^2\\
&T_{11}^{(2)}=\frac{c_0^{(2)}}{\rho_0}\left(\frac{B}{2A}\right)[\rho^{(1)}]^2+\rho_0[v^{(1)}]^2
\end{aligned}
\tag{14.5.9}
$$

将 $\rho^{(1)}(x,t)$ 和 $v^{(1)}(x,t)$ 的指数形式表达式代入(14.5.9)式，再将所得结果代入(14.5.6)式取 $I=2$ 即可得到

$$
\nabla^{(2)}\rho^{(2)}+4k^2\rho^{(2)}=\frac{4k^2\beta W^2}{\rho_0}\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(\omega t-kx)}+\text{共轭量}
\tag{14.5.10}
$$

与方程(7.3.28)相类似，上面的方程是有积累解的，要用拉格朗日变动参数法来求解，但其形式为已知，故我们省去这个过程而直接写出来，即

$$
\rho^{(2)}(x,t)=\{G_0+G_1x\}W^2\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(\omega t-kx)}+\text{共轭量}
\tag{14.5.11}
$$

G_0 是齐次波动方程解的待定常数，如果一维平面波的波源是在 x=0 处，其一阶场可表为(14.5 8)式，那么，它的谐波应当满足源条件，即

$$
p^{(n)},\ \rho^{(n)},\quad v^{(n)}=0,\quad n\geqslant 2
\tag{14.5.12}
$$

由此得到 G_0=0，再由(14.5.10)式和(14.5.11)式可以求出 G_1，最终得到如下的结果

$$\left.\begin{aligned}\rho^{(2)}(x,t)&=\frac{\mathrm{j}\beta kW^2}{\rho_0}x\mathrm{e}^{2\mathrm{j}(\omega t-kx)}+\text{共轭量}\\&=\frac{\beta kw^2}{2}x\sin[2(\omega t-kx)]\\p^{(2)}(x,t)&=\frac{c_0^2\beta kw^2}{2\rho_0}x\sin[2(\omega t-kx)]\\&=\frac{\beta\omega}{2\rho_0c_0^3}[P_0^{(1)}]^2x\sin[2(\omega t-kx)]\\v^{(2)}(x,t)&=\frac{\beta\omega w^2}{2\rho_0^2}x\sin[2(\omega t-kx)]\\&=\frac{\beta\omega}{2c_0^2}[v_0^{(1)}]^2x\sin[2(\omega t-kx)]\end{aligned}\right\}\tag{14.5.13}$$

这个结果与富比尼解(14.2.2)式一致。

下面我们讨论 $I=3$ 的情形。根据由(14.5.2)式~(14.5.5)式及(14.5.7)式得到

$$\begin{aligned}p^{(3)}&=c_0^2\rho^{(3)}+\left(\frac{\partial^2P}{\partial\rho^2}\right)_0\rho^{(1)}\rho^{(2)}+\frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3P}{\partial\rho^3}\right)_0[\rho^{(1)}]^3\\T_{11}^{(3)}&=\frac{B}{A}\frac{c_0^2}{\rho_0}\rho^{(1)}\rho^{(2)}+\frac{C}{6A}\frac{c_0^2}{\rho_0^2}[\rho^{(1)}]^3+2\rho_0v^{(1)}v^{(2)}+\rho^{(1)}[v^{(1)}]^2\end{aligned}\tag{14.5.14}$$

将(14.5.13)式代入得到

$$T_{11}^{(3)}=\frac{c_0^2}{\rho_0}W^3\left\{\left(1+\frac{C}{6A}\right)+2(\beta-2)\beta(\mathrm{j}kx)\right\}\mathrm{e}^{3\mathrm{j}(\omega t-kx)}+\text{共轭量}\tag{14.5.15}$$

相应的波动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\rho^{(3)}}{\mathrm{d}x^3}+9k^2\rho^{(3)}=(\alpha_1+\mathrm{j}\alpha_2kx)W^3\mathrm{e}^{3\mathrm{j}(\omega t-kx)}+\text{共轭量}\tag{14.5.16}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{3k^2}{\rho_0^2}\left[3\left(1+\frac{C}{6A}\right)\right]-4\beta(\beta-2)\\\alpha_2&=\frac{18}{\rho_0^2}\beta(\beta-2)k^2\end{aligned}\right\}\tag{14.5.17}$$

利用拉格朗日变动参数法可知, (14.5.16)式的解可以写成

$$\rho^{(3)}(x,t)=(E_0+E_1x+E_2x^2)W^3\mathrm{e}^{3\mathrm{j}(\omega t-kx)}+\text{共轭量} \tag{14.5.18}$$

根据源条件, E_0=0。将这些结果代入(14.5.16)式得到

$$E_1=\frac{\mathrm{j}}{6k}\left[\alpha_1+\frac{1}{6}\alpha_2\right],\quad E_2=\frac{1}{12}\alpha_2 \tag{14.5.19}$$

于是有

$$\left.\begin{aligned}\rho^{(3)}(x,t)&=\frac{3}{2\rho_0^2}\{[\eta-\beta(\beta-2)](\mathrm{j}kx)\\&\quad+\beta(\beta-2)k^2x^2\}W^3\mathrm{e}^{3\mathrm{j}(\omega t-kx)}+\text{共轭量}\\&=-\frac{3}{2\rho_0^2}\{[\eta-\beta(\beta-2)]kx\sin[3(\omega t-kx)]\\&\quad+\beta(\beta-2)k^2x^2\cos[3(\omega t-kx)]\}\\&\qquad\eta=1+\frac{C}{6A}\end{aligned}\right\} \tag{14.5.20}$$

将这个式子代入(14.5.3)式和(14.5.5)式得到

$$p^{(3)}(x,t)=c_0^2\left\{\rho^{(3)}+\frac{1}{\rho_0}\frac{B}{A}\rho^{(1)}\rho^{(2)}+\frac{1}{\rho_0^2}\frac{C}{6A}\left[\rho^{(1)}\right]^3\right\} \tag{14.5.21}$$

把(14.5.8)式、(14.5.13)式和(14.5.20)式代入上式则可以得到三阶压力的具体表达式。值得注意的是, 三阶量的积累解正比于$(kx)^2$,这一定性关系在实验中已经得到证实。

参 考 文 献

[1] Beyer R T. Parameters of nonlinearity in fluids. Jour Acoust Soc Am, 1960, 32: 719~721

[2] Coppens A B, Beyer R T, Seiden M B, et al. Parameter of nonlinearity in fluids. II. Jour Acoust Soc Am, 1965, 38: 797~804

[3] Cobb W N. Finite amplitude method for the determination of the acoustic nonlinearity parameter *B/A*, Jour Acoust Soc Am, 1983, 73: 1525~1531

[4] 钱祖文. 非线性(声)参数及其在超声成像中的应用. 应用声学, 1987, 6：1~7

[5] Zhu Z, Roos M S, Cobb W N, et al. Determination of the acoustic nonlinearity parameter *B/A* from phase measurements. Jour Acoust Soc Am, 1983, 74: 1518~1521

[6] Cain C A, Nishiyama H, Katakura K. On ultrasonic methods for measurement of the nonlinear parameter *B/A* in fluid-like media. Jour Acoust Soc Am, 1986, 80: 685~688

[7] Cain C A. Ultrasonic reflection mode imaging of the the nonlinear parameter *B/A*. I. a theoretical basis. Jour Acoust Soc Am, 1986, 80: 28~32

[8] Bjorno L. Characterization of biological media by means of their non-linearity. Ultrasonics, 1986, 24: 254~259

[9] 冯若，龚秀芬，朱正亚等. 生物媒质中非线性声学参量*B/A*的研究. 物理学报，1984，33：1282~1286

[10] 龚秀芬，冯若，朱正亚. 生物媒质非线性效应的超声研究. 声学学报, 1986, 11：95~99

[11] 石涛，龚秀芬. 有限振幅法研究损耗煤质的非线性声参量. 声学学报, 1989, 14：103~109

[12] Dunn F, Law W K, Frizzell L A. Nonlinear ultrasonic wave propagation in biological materials. IEEE Ultrasonic Symposium, 1981. 527~532

[13] Sehgal C M, Bahn R, Greenleaf J F. Measurement of acoustic nonlinearity parameter *B/A* in human tissues by a thermodynamic method. Jour Acoust Soc Am, 1984, 76:1023~1029

[14] Gong X F, Feng R, Zhu C, et al. Ultrasonic investigation of the nonlinearity parameter *B/A* in biological media. Jour Acoust Soc Am, 1984, 76: 949,950

[15] Khimunin A S. Ultrasonic propagation parameter measurements incorporating exact diffraction corrections. Acustica, 1978, 39: 87~95

[16] Law W K, Frizzell L A, Dunn F. Determination of the nonlinearity parameter *B/A* of biological media. Ultrasound in Med Biol, 1985, 11: 307~318

[17] Law W K, Frizzell L A, Dunn F. Ultrasonic determination of the nonlinearity parameter *B/A* for biological media. Jour Acoust Soc Am, 1981, 69: 1210~1212

[18] Ichida N, Sato T, Miwa H, et al. Real-time nonlinear parameter tomography using impulsive pumping waves. IEEE Trans, 1984, *SU*-31: 635~641

[19] Nakagewa Y, Nakagawa M, Yoneyama M, et al. New nonlinear parameter imaging CT system using a parametric acoustic array. Acoustical Imaging, 1985, 14:595~604

[20] Everbach E C, Zhu Z, Jiang P, et al. A correected mixture law for *B/A*, Jour Acoust Soc Am, 1991, 89: 446, 447

[21] Qian Z W. Nonlinear acoustics in higher-order approximation. Acta Physica Sinica (Overseas Edition), 1995, 4：670~675

[22] Xu X C, Mao F, Gong X F, et al. Theoretical calculation and experimental study on the third –order nonlinearity parameter *C/A* for organic liquids and biological fluids. Jour Acoust Soc Am, 2003, (113): 1743~1748

第15章 水波孤子

由前几章的内容我们知道，在声雷诺数很小的流动中，冲击波难以形成，因为由于“非线性”的原因，转移到谐波上去的能量与该谐波受到的小振幅吸收而耗散掉的能量比较不占优势，但是在雷诺数很大的流动中情况就不一样了。随着声波的传播，冲击波逐渐形成，同时受到有限振幅衰减。这种衰减从形式上看是能量无限地、不断地向更高阶谐波上转移的结果，这种转移遍及于任一阶谐波的传播过程。由此可见，无论是小振幅衰减的流动，或者是有限振幅衰减占优势的流动，都不会产生永恒的扰动。人们不禁要问，能否形成一种流动模型，其雷诺数很大，但又不让流动中低阶波的能量向高阶谐波无限制地转移，从而有可能形成一种具有确定形状的永恒扰动？这一答案是肯定的。

在第6章中曾经讨论过，一个频散介质可能达到上述目的。根据定义，一种正频散介质，高频波速大，低频波速小；而负频散介质则相反，它的低频波速大，高频波速小。另外，假设频散介质中流动的雷诺数较大，则一列有限振幅正弦波有逐步变成冲击波的趋势。但在畸变了的波形中，质点速度大的波速快，质点速度小的波速慢，由傅里叶展开定理可知，一个确定形状的波形，其傅里叶分量往往是低频成分大，故在畸变了的波形中，正半周相当于有负频散效应；反之，负半周相当于正频散效应[1]。

现在我们来讨论一种正频散介质，一列有限振幅正弦波在其中传播，由于它的负半周部分相当于正频散的，故在这些部分中总的频散是正的，于是在传播过程中，在该正弦波的负半周，其波形就会很快散开，以至于消逝；另外，这个波的正半周相当于负频散的，故在所有正半周部分，波形的等效频散与介质频散有可能相互抵消，使得正半周的扰动几乎是在无频散和无耗散(因为雷诺数很大，粘热耗散很小)的情况下传播，于是波形并不散开，振幅也不衰减，故一列有限振幅正弦波在正频散介质中传播时，有可能形成正半周有扰动，负半周没有扰动或者扰动很小的图像，即形成正半周的“整流”作用，其波形见图15.1(a)。反之，如果介质是负频散的，根据上述讨论可知，有限振幅正弦波在这种介质中将形成负半周“整流”作用，其波形见图15.1(b)。根据克雷默-克罗尼格关系，频散与吸收是互相关联的，两者通过所谓希尔伯特变换联系起来，故这里所说的没有衰减只是吸收很小而已。

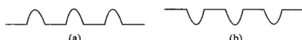


图 15.1　有限振幅弦波在无损耗的频散的介质中的传播波形

(a)正频散介质中的扰动；(b)负频散介质中的扰动

某些著作中[2]对孤波下了如下的定义：孤波是一种扰动，它是具有局部性的行波。图 15.2 给出了孤波的形状，15.2(a)是钟形脉冲状的扰动行波，图中的 ξ 为行波变量。图 15.2(b)是另一种孤波，称为扭结型的孤波，它表示了行波扰动中一种渐近态($\xi \to -\infty$)向另一个渐近态($\xi \to \infty$)的过渡是发生在某个局部区域内。关于孤子目前尚不能给出一个公认的定义。但参照 KdV 孤子的性质，我们不妨这样来认识孤子：它是这样一类孤波，当它们相遇(碰撞)后再分开时，保持形状和速度不变。

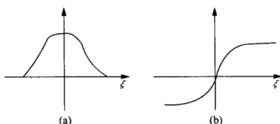


图 15.2　两种形状的孤波

(a)钟形脉状孤波；(b)扭结型孤波

到目前为止，人们已经知道 KdV 方程(6.3.1)具有孤子解(6.3.9)，此外还有三类熟知的方程也有孤子解，它们是正弦-克莱因(Klein)-戈尔登(Gordon)方程(简称 sKG 方程或 sG 方程)，非线性薛定谔方程(简称 NLS 方程)以及托达(Toda)晶格方程。从形式上可以将这类方程归纳为

$$u_t = K[u] \quad \text{或} \quad u_{tt} = M[u]$$

式中，K 和 M 为非线性算符，下标 t 表示该量对时间 t 的偏导数。本章仅讨论 KdV 及 NLS 方程的导出及其解法，特别讨论了它们的散射反演求解法。

15.1　线 性 水 波[3,4]

当流体不可压缩时，它的连续性方程可表示为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{15.1.1}$$

运动方程可表示为

$$\frac{\mathrm{D}\boldsymbol{u}}{\mathrm{D}t}=-\nabla\left(\frac{P}{\rho}+gz\right)+\nu\nabla^{2}\boldsymbol{u} \tag{15.1.2}$$

若流体做无旋运动，则$\nabla\times\boldsymbol{u}=0$，于是流动存在速度势$\boldsymbol{\Phi}$，使得

$$\boldsymbol{u}=\nabla\boldsymbol{\Phi} \tag{15.1.3}$$

式中，$\boldsymbol{u}$为质点速度向量，P为压力，ρ为密度，ν为黏滞率，g为重力加速度常数，z为铅直坐标，取向上为正，ρgz为单位体积流体的位能。忽略黏滞耗散，应用向量恒等式

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=\nabla\left(\frac{\boldsymbol{u}^{2}}{2}\right)-\boldsymbol{u}\times\nabla\times\boldsymbol{u}$$

将这个关系式代入(15.1.2)式，并进行一次积分容易得到

$$-\frac{P}{\rho}=gz+\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left|\nabla\Phi\right|^{2}+C(t)$$

上式称为广义的伯努利积分，$C(t)$为积分常数(对坐标变量而言)，如果适当选取势函数，使它满足下述关系，可以使$C(t)$隐含于$\boldsymbol{\Phi}$函数中，或者认为$C(t)=0$，即选

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial t}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{P_{\mathrm{a}}}{\rho}+C(t)$$

$$\nabla\Phi'=\nabla\Phi$$

式中，P_{a}为大气压力，一般情况下，它为常量。这样选取等效于在广义伯努利积分中只要取$C(t)=0$即可，即

$$-\frac{P}{\rho}=gz+\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left|\nabla\Phi\right|^{2} \tag{15.1.4}$$

如果流体的底边界是硬的，则当$z=-h(x,y)$时，有

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0 \tag{15.1.5}$$

式中，$\boldsymbol{n}$为底面的单位法线向量，规定它指向液体的一侧为正方向。为了求得在底面上的速度表达式，我们先导出下述式子。设有一个表面，其曲面方程可写为

$$z=\zeta(x,y,t) \tag{15.1.6}$$

或者将它改写为隐函数形式

$$F(\boldsymbol{r},t) = z - \zeta(x,y,t) = 0$$

式中，为书写方便起见，将 x, y 变量写为平面极坐标向量 $\boldsymbol{r}$ 的形式，如表面某点的质点速度为 $\boldsymbol{q}$，流体中的质点速度为 $\boldsymbol{u}$，于是有

$$F(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{q}\mathrm{d}t, t+\mathrm{d}t) = 0$$

展开可以得到

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{q}\cdot\nabla F = 0$$

在 $z=\zeta$ 的表面上，质点速度必须连续，于是在底面上的式子可写为

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla F = 0 \tag{15.1.7}$$

对于自由表面而言，如果其表面方程也写为(15.1.6)式的形式，则(15.1.7)式成为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}\\ z=\zeta\end{aligned}\right\} \tag{15.1.8}$$

假设水的深度是常量，即 $h(x,y)$=常量。将(15.1.3)式代入(15.1.1)式，则有

$$\nabla^2\Phi = 0 \tag{15.1.9}$$

在运动方程(15.1.4)中，忽略其非线性项便可得到

$$P = -\rho g z - \rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{15.1.10}$$

在自由面上，$P=P_{\mathrm{a}}$。如果我们检查一下求得(15.1.4)式的过程便可以发觉，我们用 $\Phi - P_{\mathrm{a}}t/\rho$ 代替了 Φ，如果将后一项从其中取出来，那么(15.1.10)式也可写成

$$-\frac{P-P_{\mathrm{a}}}{\rho} = gz + \frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{15.1.11}$$

忽略非线性项，自由面上的边界条件(15.1.8)可写为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}, \quad z=0 \tag{15.1.12}$$

式中，将 $z=\zeta$ 的右端展成泰勒级数之后只取线性项，故将 $\zeta=0$ 写为 $z=0$ 。同理把底部的边界条件(15.1.5)式写为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}\Big|_{z=-h}=0 \tag{15.1.13}$$

这样我们的任务是求(15.1.9)式~(15.1.13)式中线性问题的解。下面我们仅仅讨论角频为 ω 的简谐水波，为此，我们假设

$$\left.\begin{aligned}\zeta(x,y,t)&=\eta(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\\ \Phi(x,y,t)&=\phi(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\\ u(x,y,z,t)&=U(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}\right\} \tag{15.1.14}$$

将这组解代入上述 4 个方程组，容易得到

$$\left.\begin{aligned}\Delta^2\phi=0,\quad -h<z<0\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}=0,\quad z=-h\\ \frac{\partial\phi}{\partial z}+\mathrm{j}\omega\eta=0,\quad z=0\\ g\eta-\mathrm{j}\omega\phi=0,\quad z=0\end{aligned}\right\} \tag{15.1.15}$$

令

$$\eta=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx} \tag{15.1.16}$$

代入(15.1.15)式得到

$$\left.\begin{aligned}\phi=B\cosh\left[k(z+h)\right]\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\\ B=\frac{-\mathrm{j}gA}{\omega}\frac{1}{\cosh(kh)}\end{aligned}\right\} \tag{15.1.17}$$

且有

$$\omega^2=gk\tanh(kh) \tag{15.1.18}$$

于是相速度

$$C=\frac{\omega}{k}=\sqrt{\frac{g}{k}\tanh(kh)} \tag{15.1.19}$$

为频散方程，显然有近似关系

$$C=\begin{cases}\sqrt{gh}, & kh \ll 1 \\ \sqrt{g/k}, & kh \gg 1\end{cases} \tag{15.1.20}$$

通常称 $\sqrt{gh}$ 为浅水波或长波相速，即在 $kh \ll 1$ 时，其频散可以忽略。而 $\sqrt{g/k}$ 为深水波或短波相速，它有频散。

15.2　浅水中的非线性波[3,4]

15.1节我们概述了线性水波理论，现在我们来讨论非线性水波，首先将一般情况下的波方程量纲为一化。对于浅水波，我们作如下的变量变换，令

$$(x',y')=k(x,y),\quad z'=\frac{z}{h},\quad t'=\omega t=k\sqrt{gh}t$$

$$\zeta'=\frac{\zeta}{A},\varPhi'=\varPhi\bigg/\left(\frac{A}{kh}\sqrt{gh}\right) \tag{15.2.1}$$

由此得到质点速度的变换关系：

$$(u,v)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\varPhi=\frac{A}{h}\sqrt{gh}(u',v') \tag{15.2.2}$$

式中

$$u'=\frac{\partial\varPhi'}{\partial x'},\quad v'=\frac{\partial\varPhi'}{\partial y'}$$

同理可得

$$W=\frac{\partial\varPhi}{\partial z}=\frac{1}{kh}\frac{A}{h}\sqrt{gh}W' \tag{15.2.3}$$

$$W'=\frac{\partial\varPhi'}{\partial z'}$$

令

$$\mu=kh,\quad \varepsilon=\frac{A}{h} \tag{15.2.4}$$

将这些变换代入(15.1.4)式, (15.1.8)式和(15.1.9)式并在得到的结果中省去所有的撇号，容易得到下述方程组：

$$\mu^2(\Phi_{xx}+\Phi_{yy})+\Phi_{zz}=0,\quad -1<z<\varepsilon\zeta \tag{15.2.5}$$

$$\mu^2(\zeta_t+\varepsilon\Phi_x\zeta_x+\varepsilon\Phi_y\zeta_y)=\Phi_z,\quad z=\varepsilon\zeta \tag{15.2.6}$$

$$\left.\begin{aligned}\mu^2(\Phi_t+\zeta)+\frac{1}{2}\varepsilon\left[\mu^2(\Phi_x^2+\Phi_y^2)+\Phi_z^2\right]=0\\ z=\varepsilon\zeta\end{aligned}\right\} \tag{15.2.7}$$

$$\Phi_z|_{z=-1}=0 \tag{15.2.8}$$

取浅水近似$\mu=kh<<1$，但$\varepsilon=A/h$任意，展开Φ为$(z+1)$的级数，则有

$$\Phi(x,y,z,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(z+1)^n\Phi_n \tag{15.2.9}$$

式中

$$\Phi_n=\Phi_n(x,y,t)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^n}\bigg|_{z=-1},\quad n=0,1,2,\cdots \tag{15.2.10}$$

定义$\Delta=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$为二维算符，代入(15.2.5)式容易得到递推关系

$$\Phi_{n+2}=-\frac{\nabla^2\Phi_n}{(n+1)(n+2)}\mu^2,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{15.2.11}$$

从底部的边界条件(15.2.8)式可知

$$\Phi_1=\frac{\partial\Phi}{\partial z}\bigg|_{z=-1}=0$$

故可推得

$$\Phi_1=\phi_3=\cdots=\Phi_{2m+1}=\cdots=0$$

将这些结果代入到(15.2.9)式，得到

$$\Phi=\Phi_0-\frac{\mu^2}{2}(z+1)^2\nabla^2\Phi_0+\frac{\mu^4}{24}(z+1)^4\nabla^4\Phi_0+O(\mu^6) \tag{15.2.12}$$

式中，∇^2为二维拉普拉斯算子，$\nabla^4=\nabla^2\nabla^2$，令

$$H=1+\varepsilon\zeta,\quad \boldsymbol{u}_0=\nabla\Phi_0 \tag{15.2.13}$$

将(15.2.12)式和(15.2.13)式代入到有关自由表面的两个方程(15.2.6)和(15.2.7)，并对后一结果式做梯度运算，则可以得到

$$\frac{1}{2}H_t+\nabla H\cdot\left(\boldsymbol{u}_0-\frac{\mu^2}{2}H^2\nabla^2\boldsymbol{u}_0\right)+H\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0-\frac{\mu^2}{6}H^3\nabla^2(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0)=O(\mu^4) \tag{15.2.14}$$

以及

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}_{0t}+\varepsilon\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla\boldsymbol{u}_0+\frac{1}{\varepsilon}\nabla H+\mu^2\nabla\left[-\frac{\varepsilon}{2}H^2\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla^2\boldsymbol{u}_0\right.\\&\left.+\frac{\varepsilon}{2}H^2(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0)^2-\frac{1}{2}H^2\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{0t}\right]=O(\mu^4)\end{aligned} \tag{15.2.15}$$

对(15.2.12)式做二维梯度运算及$\dfrac{\partial}{\partial z}$求导，则分别得到

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{u}_0-\frac{\mu^2}{2}(z+1)^2\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0+O(\mu^4) \tag{15.2.16}$$

$$W=\frac{\partial\Phi}{\partial z}=-\mu^2(z+1)\nabla^2\Phi_0=\mu^2(z+1)\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0+O(\mu^4) \tag{15.2.17}$$

在求得(15.2.16)式时，应用了$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}_0=0$，故有$\nabla^2\boldsymbol{u}_0=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0$。下面我们用伯努利积分求压力的表达式，它可以写成量纲为一式，即

$$-P=z+\varepsilon\left\{\Phi_t+\frac{\varepsilon}{2}\left[(\nabla\Phi)^2+\frac{1}{\mu^2}\Phi_z^2\right]\right\} \tag{15.2.18}$$

其中的 P 已经除以 ρgh 使之无量纲化了。利用(15.2.12)式，(15.2.16)式和(15.2.17)式，保留到μ^2项，则(15.2.18)式可改写为

$$\begin{aligned}-P=z+\varepsilon\left\{\left[\Phi_{0t}-\frac{\mu^2}{2}(z+1)^2\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{0t}\right]+\frac{\varepsilon}{2}\Big[\boldsymbol{u}_0^2\right.\\\left.-\mu^2(z+1)^2\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla^2\boldsymbol{u}_0+\mu^2(z+1)^2(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0)^2\Big]\right\}\end{aligned} \tag{15.2.19}$$

将(15.2.12)式代入(15.2.7)式可以解出Φ_{0t}，再将其他代入(15.2.19)式，可得

$$p=(\varepsilon\zeta-z)-\frac{\mu^2}{2}\left[H^2-(z-1)^2\right]\{\nabla\cdot\boldsymbol{u}_{0t}+\varepsilon[\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla^2\boldsymbol{u}_0-(\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0)^2\ \}+O(\mu^4) \tag{15.2.20}$$

将速度向量在水层内平均，应用(15.2.16)式，有

$$\overline{\boldsymbol{u}}=\frac{1}{H}\int_{-1}^{\varepsilon\tau}\nabla\Phi dz=\boldsymbol{u}_0-\frac{\mu^2}{6}H^2\nabla^2\boldsymbol{u}_0-O(\mu^4)$$

$\overline{\boldsymbol{u}}$ 表示向量 $\boldsymbol{u}$ 在水层内的平均量。解出 $\boldsymbol{u}_0$ 代入(15.2.14)式和(15.2.15)式可以得到

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\varepsilon\nabla\cdot(h\overline{\boldsymbol{u}})=0 \tag{15.2.21}$$

$$\frac{\partial\overline{\boldsymbol{u}}}{\partial t}+\varepsilon\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\overline{\boldsymbol{u}}+\frac{\nabla H}{\varepsilon}+\frac{\mu^2}{6}\frac{\partial(H^2\nabla^2\overline{\boldsymbol{u}})}{\partial t}+\mu^2\nabla\left\{-\frac{\varepsilon}{3}H^2\boldsymbol{u}\cdot\nabla^2\overline{\boldsymbol{u}}+\frac{\varepsilon}{2}H^2(\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{u}})^2-\frac{H^2}{2}\nabla\cdot\left(\frac{\partial\overline{\boldsymbol{u}}}{\partial t}\right)\right\}=O(\mu^4) \tag{15.2.22}$$

应当提起的是，将 $\boldsymbol{u}_0$ 的表示式代入(15.2.20)式，因为只取到 μ^2 的量级，故所得到的式子是在(15.2.20)式中将 $\boldsymbol{u}_0$ 用 $\overline{\boldsymbol{u}}_0$ 代替即可。

假设 $O(\varepsilon)=O(\mu^2)<<1$，即 ε 和 μ^2 均为高阶小量，如果只取到 ε 或者 μ^2 的项，则(15.2.20)式~(15.2.22)式在这样的近似下可写为(下面省去 $\overline{\boldsymbol{u}}$ 上的一横，即用 $\boldsymbol{u}$ 代替)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\nabla\cdot[(\varepsilon\zeta+1)\boldsymbol{u}]=0 \tag{15.2.23}$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}+\varepsilon\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\zeta-\frac{\mu^2}{3}\nabla\nabla\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)=0 \tag{15.2.24}$$

$$P=\varepsilon\zeta-z+\frac{\mu^2}{2}(z^2-2z)\nabla\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}\right)=0 \tag{15.2.25}$$

现在来讨论一维行波，这时的坐标变量为 x，时间变量为 t，作下述行波变换

$$\sigma=x-t,\quad \tau=\varepsilon\tau \tag{15.2.26}$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial\sigma}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \sigma}+\frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}=-\frac{\partial}{\partial \sigma}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau}$$

将这些结果代入(15.2.23)式和(15.2.24)式的一维形式的方程组，对它们作(15.2.26)式的变换，并将得到的结果式相加，便可得到

$$\frac{\partial(u+\zeta)}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial \sigma}+\frac{\partial(u\zeta)}{\partial \sigma}+\frac{\mu^2}{3\varepsilon}\frac{\partial^3 u}{\partial \sigma^3}=O(\mu^2) \tag{15.2.27}$$

式中，左端各项为同阶大小的。将变换关系(15.2.26)应用到(15.2.24)式中去，并将得到的结果取零级近似可得

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}=\frac{\partial \zeta}{\partial \sigma}$$

或者近似地有 $u=\zeta$，再将这一近似用之于(15.2.27)式，便可得到

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+\frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial \sigma}+\frac{\mu^2}{6\varepsilon}\frac{\partial^3 u}{\partial \sigma^3}=0 \tag{15.2.28}$$

既然上式是在第一级近似 $u=\zeta$ 的情况下求得的，那么如果在上式中用 ζ 代替 u，则可以得到关于 ζ 的方程：

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau}+\frac{3}{2}\eta\frac{\partial \eta}{\partial \sigma}+\frac{\mu^2}{6\varepsilon}\frac{\partial^3 \eta}{\partial \sigma^3}=0 \tag{15.2.29}$$

现在恢复有量纲变量，则有

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+\frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial \sigma}+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial \sigma^3}=0 \tag{15.2.30}$$

上式即为 KdV 型的方程，对它作如下的变换，令

$$u\to-\frac{4}{6^{3/2}}u,\quad \sigma\to\frac{\sigma}{6^{3/2}}$$

于是(15.2.30)式成为

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}-6u\frac{\partial u}{\partial \sigma}+\frac{\partial^3 u}{\partial \sigma^3}=0 \tag{15.2.31}$$

这个式子即为标准型的 KdV 方程，显然，上式中的第二项为非线性项，第三项为频散项。在第 6 章中我们已讨论过 KdV 方程的孤子解，而下面我们将用熟知的散射反演法(inverse scattering)来求这个方程的解。这是因为后一方法不仅对于 KdV

方程可以求解，而且对于其他型的方程如 sKG 和 NLS 型方程等亦可以用此法求解，故它具有普遍意义。

15.3　求解 KdV 方程初值问题的散射反演法[2, 5~9]

在第 6 章我们利用椭圆函数表示式求得了 KdV 方程的孤波解，而在一般情况下，求解这类非线性问题的解析解是很困难的。20 世纪 60 年代，扎布斯基(Zabusky)和克鲁斯科尔(Kruskal)在初始扰动值为 $u_0(0,x)=u_0(x)=\cos\pi x$ 的情况下求 KdV 方程的数值解时发现了一个很有趣的现象，他们看到这个正弦式的初始扰动逐渐分解成若干个小脉冲状的扰动，这些小脉冲之间相互作用时，行为很像粒子之间的碰撞，正由于这些小扰动带有这种粒子特性，从而启发人们将这类扰动称为孤子。

在线性波动理论中，一个初始扰动可以激励一系列傅里叶分量的正弦振动，这些振动彼此独立。但在非线性振动理论中，一个初始扰动也能够激励一系列正弦振动，但这些正弦振动彼此之间却不独立，它们之间有能量转移。按上面所说的，一个初始扰动激励的孤子却是相互独立的，故对它进行各种性质的探索是有重要意义的。

起初，人们去寻求 KdV 方程的一般解时，首先想到的是将方程如何线性化(如仿效科尔-霍普变换线性化伯格斯方程那样)，但结果不成功。后来加德纳(Gardner)、格林(Greene)，克鲁斯科尔和缪拉(Miura)等作出一种巧妙的(GGKM)变换，找出了 KdV 方程与量子力学中的薛定谔方程之间的联系，即使得前一方程的解函数成为后一方程中的位能函数，这个位能在量子力学中可以通过熟知的散射反演法求出，这就使得这个本来属于非线性的问题，过渡为线性问题的反演。

首先讨论缪拉变换，他导出了一个变形的 KdV 方程及其与 KdV 方程的关系，其过程如下，如果 v 满足变形的 KdV 方程 $Q(v)=0$，即

$$Q(v)\equiv v_t-6v^2v_x+v_{xxx}=0 \tag{15.3.1}$$

造一个函数 u 使得

$$u=v^2+v_x \tag{15.3.2}$$

这个函数满足 KdV 方程 $p(u)=0$，或者

$$p(u)\equiv u_t-6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{15.3.3}$$

而 $P(u)$与 $Q(u)$的联系为下式决定，即

$$p(u) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v \right) Q(v) \tag{15.3.4}$$

如果将 u 当作已知量，则(15.3.2)式即为里卡迪(Riccati)方程，可以通过下述变换使之线性化，即令

$$v = \frac{1}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{15.3.5}$$

将它代入(15.3.2)式，便可得到线性方程

$$\psi_{xx} - u\psi = 0 \tag{15.3.6}$$

式中，ψ_{xx} 为 ψ 对 x 的二阶导数，u 满足 KdV 方程。要是将(15.3.6)式代入 KdV 方程，得到的结果式是非常复杂的，因而不这样做。下面将利用 KdV 方程的伽利略不变性来处理这个问题，即令

$$\left. \begin{aligned} u' &= u - \lambda \\ x' &= x + 6\lambda t \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \tag{15.3.7}$$

如将这个变换代入 KdV 方程很容易证明其不变性。现在将(15.3.7)式代入(15.3.6)式，省去变量上的撇号则得到(15.3.6)式的推广表达式

$$-\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi \tag{15.3.8}$$

这个式子即为 ψ 的薛定谔方程，函数 u 是该方程中的位能，但值得注意的是，u 在 KdV 方程中与 t 有关系，这相应于薛定谔方程的位能是不稳定的函数，一般说来，其本征值应与时间有关。但可以证明，当 u 在无限远处随 x 急剧减小或者满足周期性边界条件时，本征值 λ 与时间无关，其证明如下：

由(15.3.8)式可知

$$u = \lambda + \frac{\psi_{xx}}{\psi} = \lambda(t) + \frac{\psi_{xx}}{\psi}$$

或

$$u_t \psi^2 = \lambda_t \psi^2 + (\psi_{xt}\psi - \psi_x \psi_t)_x$$

在上式两端加上$(-6uu_x + u_{xxx})\psi^2$，并代入 u 的表达式，最终可得

$$\left.\begin{aligned}\lambda_t\psi^2+[\psi R_x-\psi_x R]_x=0\\ R\equiv\psi_t+\psi_{xxx}-3(u+\lambda)\psi_x\end{aligned}\right\}\tag{15.3.9}$$

对上式的第一个式子进行一次积分，得到

$$\lambda_t\int\psi^2\mathrm{d}x+[\psi R_x-\psi_x R]_{边界}=0$$

在无边界的情况下，由于波函数ψ有ψ_x在无限远处为零，故$[\psi R_x-\psi_x R]_{-\infty}^{\infty}=0$，但$\int\psi^2\mathrm{d}x\neq0$，故有$\lambda_t=0$；另外，在有边界有情况下，波函数满足周期边界条件，故$[\psi R_x-\psi_x R]_{边界}=0$亦有$\lambda_t=0$，这个结果对于散射反演非常重要。

将上述结果代入(15.3.9)式的第一个式子可得

$$\psi R_{xx}-\psi_{xx}R=0$$

利用(15.3.8)式，上式成为

$$R_{xx}+(\lambda-u)R=0\tag{15.3.10}$$

由此可见，R也满足薛定谔方程，因而它也有波函数解。设两个独立的波函数为ψ和ϕ，利用一个波函数ψ可以造出一个与它互相独立的另一波函数，例如取

$$\phi=\psi\int\frac{\mathrm{d}x}{\psi^2}\tag{15.3.11}$$

于是R可表示为

$$R\equiv\psi_t+\psi_{xxx}-3(u+\lambda)\psi_x=C\psi+D\phi\tag{15.3.12}$$

式中，C, D为积分常数

现在我们概述一下薛定谔方程的本征问题及其反演。将(15.3.8)式改写为

$$\psi_{xx}+(\lambda-u)\psi=0\tag{15.3.13}$$

$u=u(x,t)$为势能函数，通常它在x有限的区域内$u<0$，$|x|\to\infty$时趋近于零的速度很快。其本征值有两类，一类是离散谱，另一类是连续谱。对于离续谱来说，其本征函数在无限远处可表示为

$$\left.\begin{aligned}\psi_n\sim c_n\mathrm{e}^{-k_n x},\quad x\to\infty\\ \psi_n\sim d_x\mathrm{e}^{k_n x},\quad x\to-\infty\end{aligned}\right\}\tag{15.3.14}$$

而且ψ_n满足归一化条件，本征直$\lambda=\lambda_x=-k_n^2$。

对于连续谱来说，$\lambda=k^2$，其本征函数的渐近形式为

$$\psi \sim \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx}+b(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx}, \quad x \to \infty \tag{15.3.15}$$

$$\psi \sim a(k,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kx}, \quad x \to -\infty \tag{15.3.16}$$

式中，$b(k,t)$和$a(k,t)$分别为波函数的反射系数和透射系数。如果c_n和b已知，则通过它们可以得到盖尔芬德(Gelfand)-莱维坦(Levitan)-马尔琴科(Marchenko)（简称GLM方程）积分方程的核：

$$B(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} b(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx}\mathrm{d}k+\sum_{n=1}^{N} c_n^2(t)\mathrm{e}^{-k_n x} \tag{15.3.17}$$

相应的GLM积分方程为

$$K(x,y,t)+B(x+y,t)+\int_x^{\infty} B(y+z,t)K(x,z,t)\mathrm{d}z=0 \tag{15.3.18}$$

解出$K(x,y,t)$，于是$u(x,t)$可以得自

$$u(x,t)=-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}K(x,x,t) \tag{15.3,19}$$

这就是散射反演的主要内容。

散射反演的原问题是解KdV的初始值问题，只知道$u(x,0)$，故首先将$u(x,0)$代入(15.3.13)式，求解不含时间t的薛定谔方程：

$$\psi_{xx}+[x-u(x,0)]\psi=0$$

从而求出k_n, c_n及$b(k,0)$等数值。接着再求这些量的时间演变量，其过程如下：对于离散本征值的情况，在$|x|\to\infty$时，其本征函渐近式是(15.3.14)式所表示的，但这时(15.3.11)式所表示的ϕ指数式发散，故在(15.3.12)式中必须要求$D=0$，将(15.3.13)式代入(15.3.12)式消去u可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\psi^2}{2}\right)+[\psi\psi_{xx}-2(\psi^2)_x-3\lambda\psi^2]_x=C\psi^2$$

对上式进行一次积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2\mathrm{d}x=C\int\psi^2\mathrm{d}x$$

显然，上式左端为零，故有

$$C=0$$

将这个结果再代入(15.3.12)式，便得

$$\psi_t+\psi_{xxx}-3(u+\lambda)\psi_x=0$$

在$|x|\to\infty$，u减少很快，即$u\to 0$，将(15.3.14)式代入上式便可近似地得到

$$c_n(t)=4k_n^3tc_n(t)=0$$

$$c_n(t)=c_n(0)\mathrm{e}^{4k_n^3t} \tag{15.3.20}$$

这即为从 $c_n(0)$到 $c_n(t)$的时间演变关系。

对于连续谱情况，将(15.3.16)式代入(15.3.12)式，得到 $a(k,t)$的微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}a(k,t)}{\mathrm{d}t}+4\mathrm{j}k^3a(k,t)=Ca(k,t)+\frac{D}{a(k,t)}\int \mathrm{e}^{2\mathrm{j}kx}\mathrm{d}x$$

式中，右端第二项为 x 的函数，但其他项都与 x 无关，要求等式成立，必有 $D=0$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}a(k,t)}{\mathrm{d}t}+(4\mathrm{j}k^3-C)a(k,t)=0 \tag{15.3.21}$$

同理，将(15.3.15)式代入(15.3.12)式，使得 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}kx}$ 前的系数分别相等，容易得到

$$\left.\begin{aligned} C&=4\mathrm{j}k^3\\ \frac{\mathrm{d}b(k,t)}{\mathrm{d}t}-8\mathrm{j}k^3b(k,t)&=0\end{aligned}\right\} \tag{15.3.22}$$

求解(15.3.21)式和(15.3.22)式便可得到

$$\left.\begin{aligned} a(k,t)&=a(k,0)\\ b(k,t)&=b(k,0)\mathrm{e}^{8\mathrm{j}k^3t}\end{aligned}\right\} \tag{15.3.23}$$

将(15.3.20)式和(15.3.23)式中的 c_n 和 $b(k,t)$代入(15.3.17)式、(15.3.18)式和(15.3.19)式即可以得到 KdV 方程的解 $u(x,t)$。

综上所述可知，我们原来的任务是解 KdV 方程的初始值问题，这是一个非线性问题，但我们采取了散射反演法来解决它，其步骤如下：①正问题，从已知的初始条件 $u(x,0)$出发求解薛定谔方程的本征值 λ 及本征函数 ψ，进而求出反射、散

射数据 $b(k,0)$, $c_n(0)$等；②数据的时间演变，通过时间演变方程求得反射、散射时间演变表达式 $b(k,0)$, $c_n(t)$；③利用 GLM 积分方程关系将散射、反射数据代入，从而反推“位能函数” $u(x,t)$。或用图解表示(图 15.3)。

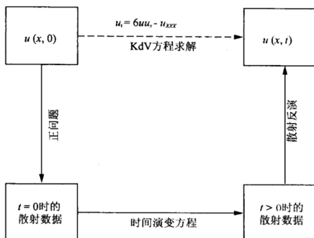


图 15.3　散射反演法求 KdV 方程的流程图

将 $b(k,t)$和 $c_n(t)$代入(15.3.17)式便可得到 GLM 积分方程的核

$$B(x+y,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}b(k,0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}[k(x+y)+8k^3t]}\mathrm{d}k+\sum_{n=1}^{N}c_n^2(0)\mathrm{e}^{8k_n^3t-k_n(x+y)} \tag{15.3.24}$$

当 t 充分大时, (15.3.24)式的积分项可以用稳相法求出，可以证明它至少随 $t^{-1/3}$ 趋于零，故在足够长的时间之后近似有

$$B(x+y,t)\approx\sum_{n=1}^{N}c_n^2(0)\mathrm{e}^{8k_n^3t-k_n(x+y)} \tag{15.3.25}$$

即积分方程的核项中主要是离散谱的贡献。显然，上式实为 N 项之和，即

$$B(x+y,t)=\sum_{n=1}^{N}B_n(x+y,t) \tag{15.3.26}$$

式中

$$B_n(x+y,t)=c_n^2(0)\mathrm{e}^{8k_n^3t-k_n(x+y)} \tag{15.3.27}$$

由于 GLM 是线性的，故可以得到

$$K(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}K_n(x,y,z) \tag{15.3.28}$$

显然，每一个 K_n 对应一个孤波解，为简单起见，我们首先讨论一个离散本征态，其本征值为 $-k_1^2$，令 $c_1^2(0)=m_1$，于是相应的GLM方程可表示为

$$K_1(x,y,t)+m_1\mathrm{e}^{8k_1^3t-k_1(x+y)}+m_1\mathrm{e}^{8k_1^3t}\int_x^{\infty}\mathrm{e}^{-k_1(y+z)}K_1(x,z,t)\mathrm{d}z=0 \tag{15.3.29}$$

将上式对 y 求导，便得到

$$\frac{\partial K_1(x,y,t)}{\partial y}=-k_1K_1(x,y,t)$$

故其解形如

$$K_1(x,y,t)=\mathrm{e}^{-k_1y}h(x,t)$$

将这个解再代入(15.3.19)式，可以解得

$$K_1(x,y,t)=-\frac{m_1\mathrm{e}^{8k_1^3t-k_1(x+y)}}{1+\dfrac{m_1}{2k_1}\mathrm{e}^{8k_1^3t-2k_1x}},\qquad y>x$$

将这个式子代入(15.3.19)式，最终可得

$$u(x,t)=-2k_1^2\operatorname{sech}^2[k_1(x-4k_1^2t)-\delta] \tag{15.3.30}$$

式中

$$\delta=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m_1}{2k_1}\right) \tag{15.3.31}$$

显然，(15.3.30)式表示了一个孤子，它的传播速度为 $4k_1^2$，振幅为 $2k_1^2$。这表明振幅大的孤子传播得快，振幅小的传播得慢。

现在来讨论两个离散本征态的情况，其本征值分别为 $-k_1^2$ 和 $-k_2^2$，令 $c_1^2(0)=m_1$，$c_2^2(0)=m_2$，于是

$$B(x,t)=B_1(x,t)+B_2(x,t)=m_1\mathrm{e}^{8k_1^3t-k_1x}+m_2\mathrm{e}^{8k_2^3t-k_2x} \tag{15.3.32}$$

令

$$K(x,y,t)=\mathrm{e}^{-k_1y}h_1(x,t)+\mathrm{e}^{-k_2y}h_2(x,t) \tag{15.3.33}$$

将这两个式子代入GLM方程(15.3.18)，可得

$$h_1(x,y)=\frac{\begin{vmatrix} -m_1 e^{8k_1^3 t-k_1 x} & \dfrac{m_1}{k_1+k_2}e^{8k_1^3 t-(k_1+k_2)x} \\ -m_2 e^{8k_2^3 t-k_2 x} & 1+\dfrac{m_2}{2k_2}e^{8k_2^3 t-2k_2 x} \end{vmatrix}}{D_e}$$

$$h_2(x,y)=\frac{\begin{vmatrix} 1+\dfrac{m_1}{2k_1}e^{8k_1^3 t-2k_1 x} & -m_1 e^{8k_1^3 t-k_1 x} \\ \dfrac{m_2}{k_1+k_2}e^{8k_2^3 t-(k_1+k_2)x} & -m_2 e^{8k_2^3 t-k_2 x} \end{vmatrix}}{D_e}$$

$$D_e=\begin{vmatrix} 1+\dfrac{m_1}{2k_1}e^{8k_1^3 t-2k_1 x} & \dfrac{m_1}{k_1+k_2}e^{8k_1^3 t-(k_1+k_2)x} \\ \dfrac{m_2}{k_1+k_2}e^{8k_2^3 t-(k_1+k_2)x} & 1+\dfrac{m_2}{2k_2}e^{8k_2^3 t-2k_2 x} \end{vmatrix}$$

将这些结果代入(15.3.33)式，再将得到的结果进一步代入(15.3.19)式，仍用 $t\to\infty$ 的近似，容易得到

$$u(x,t)=-2\left\{k_1^2\operatorname{sech}^2\left[k_1(x-4k_1^2t)-\delta_1\right]\right.$$

$$\left.+k_2^2\operatorname{sech}^2[k_2(x-4k_2^2t)-\delta_2]\right\} \tag{15.3.34}$$

式中

$$\delta_i=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{m_i}{2k_i}\right),\quad i=1,2 \tag{15.3.35}$$

上式表明，两个离散本征态对应两个孤子。如果有 N 个离散态，则有 N 个孤子与之对应。本书我们忽略了连续谱的贡献，如果考虑它的影响，则除了 N 个孤子之外还有一个尾巴，相应于连续谱的辐射的影响。如果将离散谱的本征值按其大小作有序排列，使得

$$k_1<k_2<k_3<\cdots<k_N$$

则一个初始扰动 $u(x,0)$ 在非线性和频散的介质中将分裂成为 N 个脉冲状扰动，扰动大的走在前头，扰动小的走在后头，除此以外，还拖着一个微弱的连续谱的尾巴。

15.4 深水中的非线性波[2~4]

前几节中，我们讨论了浅水中的非线性波，在导出相应的方程组时，利用了$\mu = kh << 1$作为微扰参数，对流体力学方程组作微扰展开，最终导出了 KdV 方程，这里 k 为波数，h 为水深。但在很多情况下，kh 为有限值甚至很大，通常将这种情况下的波动问题称为深水波问题。

众所周知，在理想介质中，频散效应和非线性效应的角逐可能产生永恒的波动，由此可见，在某些条件满足之后，有可能产生孤波甚至孤子。

利用方程组(15.1.4)和(15.1.8)来处理不可压缩流体的有势运动，重新写出这些方程：

$$\left.\begin{aligned} -\frac{P}{\rho} = gz + \phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 \\ \phi_x = \zeta_1 + \nabla\phi\cdot\nabla\zeta,\ z = \zeta(x,y,t) \\ \nabla^2\phi = 0,\ -h < z < \zeta(x,y,t) \end{aligned}\right\} \tag{15.4.1}$$

边界条件

$$\phi_z|_{z=-h} = 0 \tag{15.4.2}$$

$$\phi_y|_{y=0,b} = \phi_x|_{x=-l,l} = 0 \tag{15.4.3}$$

在 kh 为有限，$k\zeta_{\max} << 1$的近似下，应用多标微扰法求解上述方程组，取到三阶近似，消除微扰解中的长期项，可以得到非线薛定谔方程，即

$$\mathrm{j}u_t + u_{xx} + \nu|u|^2 u = 0 \tag{15.4.4}$$

式中，ν 为常数。现在先讨论行波解。令

$$X = x - Ct$$

将 u 写成

$$u = v(X)\mathrm{e}^{\mathrm{j}kx - \mathrm{j}\omega t} \tag{15.4.5}$$

式中，k，ω 为常数，v 为实函数。将(15.4.5)式代入(15.4.4)式，令虚部为零容易得到

$$v_{XX} - \alpha v + \nu v^3 = 0 \tag{15.4.6}$$

其中

$$\alpha = \frac{C^2}{4} - \omega, \quad k = \frac{C}{2}$$

将(15.4.6)式乘以 v_X 并进行一次积分，得到

$$v_X^2 - \alpha v^2 + \frac{1}{4}\nu v^4 = A \tag{15.4.7}$$

式中, A 为积分常数，取它为零，当 $\nu > 0$，$\alpha > 0$ 时, (15.4.7)式化归为椭圆积分，用椭圆函数来表示解，经过化简可得

$$v = \sqrt{\frac{2\alpha}{\nu}} \operatorname{sech}[\sqrt{\alpha}(x - Ct)] \tag{15.4.8}$$

将这个式子代入(15.4.5)式可知，$v(x-Ct)$ 为包迹函数、(15.4.8)式所表示的是孤波解，并且是行波性的孤波，$\sqrt{2\alpha/\nu}$ 为它的振幅, C 为它的传播速度，两者是相互独立的，而 KdV 孤波的解为

$$u = -\frac{K_p^2}{3} \operatorname{sech}^2\left[\frac{K_p}{2}(x - k_p^2 t)\right]$$

其振幅与传播速度是有关联的。显然，令当 $\nu > 0$ 时, (15.4.4)式才有孤波解。本节讨论的仅是一种特殊情形，一般解法将借助于非线性薛定谔方程的散射反演法，这将在以后的几节加以叙述。

15.5　拉克斯理论

在 15.3 节，我们介绍了 KdV 方程的散射反演解法，其要点如下：①先解薛定方程的初始值问题，求出 $t = 0$ 时的散射数据；②再根据时间演变方程(15.3.12)求出 t 时刻的散射系数；③根据 GLM 求出 KdV 方程在任意时刻的解。这样便将原来要解的非线性方程化成线性问题求解。人们不禁会问，除了 KdV 方程以外，这种方法对其他非线性问题是否还有效？为了解决这个问题，拉克斯(Lax)作出了关键性的贡献，他的理论叙述如下。

拉克斯将上述反演过程用算符形式加以概括。如果我们要解的方程为

$$u_t = K(u) \tag{15.5.1}$$

在 15.4 节，这个方程是 KdV 型的，当然，其中 K 是非线性算符。如果能找到与 u 有关的线性算符 L 和 B，它们满足方程

$$L\psi=\lambda\psi \tag{15.5.2}$$

和

$$\mathrm{j}\psi_t=B\psi \tag{15.5.3}$$

在 KdV 问题中，(15.5.2)式为薛定谔方程，且有

$$L\equiv-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u$$

而(15.5.3)式与(15.3.12)式相对应，只要在后一式子中使积分常数 $C=D=0$，就有

$$B\equiv-\mathrm{j}\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3}-3(\lambda+u)\frac{\partial}{\partial x}\right]$$

由 15.4 节的结果可知，当 u 满足规定的条件时，(15.5.2)式的本征值的谱不随时间变化，这一结果在反演过程中被利用。在量子力学中，算符 L 是自伴的，引入么正算子 U，它的伴随算符 U^{+}(即 U 的共轭转置算符)满足

$$UU^{+}=I$$

I 为单位算符。对(15.5.2)式进行么正变换，应用么正变换保持本征值 λ 不变这一性质，于是

$$UL\psi=ULU^{+}U\psi=U\lambda\psi=\lambda U\psi \tag{15.5.4}$$

这个结果表明，如果 t=0 时 $u=u(x,0)$，对应的薛定谔方程为

$$L(0)\psi(x,t=0)=\lambda(0)\psi(x,t=0)$$

则在 t 时刻 $u=u(x,t)$, $L(t)\equiv-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x,t)$，由于么正变换不改变本征值，故由(15.5.4)式可知

$$L(t)=U(t)L(0)U^{+}(t) \tag{15.5.5}$$

$$\psi(x,t)=U(t)\psi(x,0) \tag{15.5.6}$$

而 ψ 的时间演化关系为(15.5.3)式，由此得到

$$\mathrm{j}U_t = BU \tag{15.5.7}$$

将(15.5.5)式对 t 求导可得

$$L_t = U_t L(0) U^+ + UL(0) U_t^+$$

将上式中的 U_t 用(15.5.7)消去，应用(15.5.5)式有

$$L_t = -\mathrm{j}BL + \mathrm{j}LB^+ \tag{15.5.8}$$

如果算符 B 也是自伴的，则上式成为

$$\mathrm{j}L_t = BL - LB \tag{15.5.9}$$

由此可见，如果满足(15.5.2)式和(15.5.3)式并依赖于(15.5.1)式的算符 L 和 B 是自伴的，则(15.5.9)式成立，而且算符 L 的谱不随时间变化。后一结论很容易得到，只要将(15.5.2)式对 t 求导，并用到(15.5.2)式，(15.5.3)式和(15.5.8)式，容易得到

$$\begin{aligned}\lambda_t\psi &= L_t\psi + (L-\lambda)\psi_t = LB\psi - BL\psi + (L-\lambda)\psi_t \\ &= (L-\lambda)(\mathrm{j}\psi_t - B\psi) = 0\end{aligned} \tag{15.5.10}$$

即 $\lambda_t = 0$。进一步证明[9]，只要算符 B 是反对称的(即 $B^+=-B$)(15.5.9)式即可成立。

对于 **KdV** 问题，B 可表示成如下形式(因为反对称，算符的阶数必须是奇数阶)：

$$B_n = (-4)^n i\left\{\frac{\partial^{2n+1}}{\partial x^{2n+1}} + \sum_{j=1}^{n}\left[b_j\frac{\partial^{2j-1}}{\partial x^{2j-1}} + \frac{\partial^{2j-1}}{\partial x^{2j-1}}b_j\right]\right\} \tag{15.5.11}$$

当 n=0 时，有

$$B_0 = i\frac{\partial}{\partial x}$$

$$B_0L - LB_0 = -i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u\right) + i\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u\right)\frac{\partial}{\partial x}$$

$$= i\frac{\partial}{\partial x}u - iu\frac{\partial}{\partial x} = iu_x$$

将这个结果代入(15.5.8)式，利用 $L_t=u_t$,有

$$u_x = u_t$$

其解为

$$u = u(x+t)$$

为行波解(不是孤波)，属于平凡解。在讨论 $n=1$ 的情形之前，我们来回顾一下算符的运算规则。在求导时先在算符后面乘以波函数 ψ，例如

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}u &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(u\psi) = u\psi_x + u_x\psi \\
&\Rightarrow u\frac{\partial}{\partial x} + u_x \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}u &\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u\psi) = u_{xx}\psi_x + 2u_{xx}\psi_x + u\psi_{xx} \\
&\Rightarrow u_{xx} + 2u_x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{15.5.12}$$

式中，$\frac{\partial}{\partial x}u$ 为 $\frac{\partial}{\partial x}$ 对 $u\psi$ 求导，而 $u_x,\psi_x,\cdots$ 为 u,ψ 单纯对x的导数 。有了这些运算规则之后，我们就可以讨论 $n=1$ 的情况了。

当 $n=1$ 时，(15.5.11)式成为

$$B_1 = -4i\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} + b_1\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}b_1\right) \tag{15.5.13}$$

将 L, B_1 代入(15.5.8)式，按照(15.5.12)式的运算法，则可以算得

$$BL - LB = 4i\left\{-u_{xxx} - 3u_{xx}\frac{\partial}{\partial x} - 3u_x\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b_{xxx} \right.$$
$$\left. -4b_{xx}\frac{\partial}{\partial x} - 4b_x\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2bu_x\right\} \tag{15.5.14}$$

式中，省去了 b_1 的下标。要想使上式中的微分算符消失，可以选

$$b = -\frac{3}{4}u \tag{15.5.15}$$

因为 $L_t = u_t$，将这些结果代入(15.5.8)式，得到

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x$$

此即为 KdV 方程，从而可以用散射反演法求解。

15.6　扎哈罗夫-沙巴特理论和阿布洛维奇方法[5~9]

以上结果表明，散射反演法可以得到 KdV 方程的严格解，人们很自然地会问，这种方法还能解其他非线性方程吗？在拉克斯理论的基础上扎哈罗夫和沙巴特找到了对应于非线性薛定谔方程(15.4.4)的算符

$$\left.\begin{aligned} L &= \mathrm{i}\begin{pmatrix} 1+P & 0 \\ 0 & 1-P \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{pmatrix} \\ B &= -P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} \dfrac{|u|^2}{1+P} & \mathrm{i}u_x^* \\ -\mathrm{i}u_x & -\dfrac{|u|^2}{1-P} \end{pmatrix} \\ \psi &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{2}{1-P} = \nu \end{aligned}\right\} \tag{15.6.1}$$

将 L, B 代入到(15. 5.8)式之后便得到(15.4.4)式。扎哈罗夫(Zakharov)和沙巴特(Shabat)指出，在 $x \to \infty, |u| \to 0$ 的速度足够快时，则可以根据(15.6.1)式应用散射反演法来求解非线性薛定谔方程，其求解过程的梗概如下：①由 t=0 时的初始值 $u(x,0)$来求 $L\psi = \lambda\psi$ 的解，从而得到 t=0 时的散射数据；②再由算符 B 所决定的时间演变方程 $\mathrm{i}\psi_t = B\psi$ 来求 t 时刻的散射数据；③构造 GLM 方程，从而求出 u(x,t)，这样就求得了非线性薛定谔方程的严格解。当然，求解的实际过程还是颇费周折的，读者可参阅其原文。

寻找 L, B 的一般方法是阿布洛维奇提出的，其过程如下：他们假设

$$\left.\begin{aligned} L &\equiv \begin{pmatrix} \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x} & -\mathrm{i}q(x,t) \\ \mathrm{i}r(x,t) & -\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \\ B &\equiv \begin{pmatrix} a(x,t,\lambda) & b(x,t,\lambda) \\ c(x,t,\lambda) & -a(x,t,\lambda) \end{pmatrix} \\ \psi &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{15.6.2}$$

$a(x,t,\lambda), b(x,t,\lambda), c(x,t,\lambda), q(x,t,\lambda), r(x,t,\lambda)$ 待定。将(15.6.2)式代入(15.5.2)式，(15.5.3)式和(15.5.8)式，设 λ 与 t 无关，认为 ψ_1, ψ_2 为相互独立的解，经过一系列计算容易得到如下的方程组：

$$\left.\begin{aligned} a_x &= qc - rb \\ b_x + 2\mathrm{i}\lambda b &= \mathrm{i}q_t - 2aq \\ c_x - 2\mathrm{i}\lambda c &= \mathrm{i}r_t + 2ar \end{aligned}\right\} \tag{15.6.3}$$

将式 a, b 和 c 展开成 λ 的多项式，如将 a 展成

$$a(x,t,\lambda) = 4\lambda^3 + 2qr\lambda + \mathrm{i}rq_x - \mathrm{i}qr_x \tag{15.6.4}$$

将它代入到(15.6.3)式，可以得到

$$\left.\begin{aligned} b(x,t,\lambda) &= 4\mathrm{i}q\lambda^2 - 2q_x\lambda + \mathrm{i}\left(2q^2r - q_{xx}\right) \\ c(x,t,\lambda) &= 4\mathrm{i}r\lambda^2 + 2r_x\lambda + \mathrm{i}\left(2qr^2 - r_{xx}\right) \end{aligned}\right\} \tag{15.6.5}$$

以及

$$\left.\begin{aligned} q_t - 6rqq_x + q_{xxx} &= 0 \\ r_t - 6rqr_x + r_{xxx} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{15.6.6}$$

如令

$$r = 1, \quad q(x,t) = u(x,t)$$

则(15.6.6)式成为

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

即为 KdV 方程。如将 $a(x,t,\lambda)$展成λ的二次式，即

$$a(x,t,\lambda) = 2\lambda^2 + qr \tag{15.6.7}$$

则代入(15.6.3)式得到

$$\left.\begin{aligned} b(x,t,\lambda) &= 2\mathrm{i}q\lambda - q_x \\ c(x,t,\lambda) &= 2\mathrm{i}r\lambda - r_x \end{aligned}\right\} \tag{15.6.8}$$

以及

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{i}q_t + q_{xx} - 2q^2r &= 0 \\ \mathrm{i}r_t - r_{xx} + 2q^2r &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{15.6.9}$$

如果令

$$\left.\begin{aligned} r(x,t) &= -\nu q^*(x,t) \\ q(x,t) &= u(x,t) \end{aligned}\right\} \tag{15.6.10}$$

则(15.6.9)式成为(15.4.4)式，即非线性薛定谔方程。

若$a(x,t,\lambda)$展成λ的负幂，例如

$$a(x,t,\lambda) = -\frac{1}{4\lambda}\cos\phi \tag{15.6.11}$$

代入(15.6.3)式，便得到

$$\left.\begin{aligned} b(x,t,\lambda) &= \frac{q_t}{2\lambda} \\ c(x,t,\lambda) &= -\frac{r_t}{2\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{15.6.12}$$

令

$$r(x,t) = -q(x,t) = \frac{\phi_x}{2} \tag{15.6.13}$$

则可以得到正弦-克莱因-戈尔登方程：

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin\phi = 0 \tag{15.6.14}$$

这个方程的行波解可以这样求得。令

$$\left.\begin{aligned} X &= x - Ct \\ \phi &= \Phi(X) \end{aligned}\right\} \tag{15.6.15}$$

代入到(15.6.14)式，容易得到

$$\left(C^2 - 1\right)\Phi_{xx} + \sin\phi = 0 \tag{15.6.16}$$

将上式乘以 Φ_x 并将所得结果积分一次，便有

$$\left(C^2 - 1\right)\Phi_X^2 - 4\sin[\Phi(X)/2] = A \tag{15.6.17}$$

式中，A 为积分常数。上式可以化归椭圆积分，最终以椭圆函数表示，在某些情况下具有孤波解。

15.7 二 维 孤 波[21,22]

以上讨论的问题是随时间变化的一维孤波，即一个时间变量和一个空间变量，俗称 1+1 问题。如果空间变量是两个，即所谓 2+1 问题，例如 Kadomstev-Petviashvili 方程，它是描写 KdV 方程所表述的长波被更长的波所调制后的孤波方程，即

$$u_{tx} + (uu_x)_x + u_{xxxx} \pm \frac{1}{2}u_{yy} = 0 \tag{15.7.1}$$

显然，上述方程是 2+1 型的。当方程组的“±”号取正号时，这个方程的算符为

$$\left.\begin{aligned} L &= 6\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \sqrt{6}\frac{\partial}{\partial y} + u(x,y,t) \\ B &= -4\mathrm{i}\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \mathrm{i}u\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\mathrm{i}}{2}u_x - \frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{6}}\int^x u_y(\xi,y,t)\mathrm{d}\xi \end{aligned}\right\} \tag{15.7.2}$$

当方程组的“±”号取负号时，这个方程的算符为

$$
\left.\begin{aligned}
L &= 6\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\sqrt{6}\frac{\partial}{\partial y}+u(x,y,t)\\
B &= -4\mathrm{i}\frac{\partial^3}{\partial x^3}-\mathrm{i}u\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\mathrm{i}}{2}u_x-\frac{1}{2\sqrt{6}}\int^x u_y(\xi,y,t)\mathrm{d}\xi
\end{aligned}\right\} \tag{15.7.3}
$$

将这两个方程与(15.7.2)式联立则可以用反演法求解。

15.8　非传播性孤波[10~19]

在20世纪初，法拉第在水槽中通过参量激励得到了二分频水波。前几年，吴君汝等将一个小水槽放在振动台上作参量激励，观察到以二分频振动的孤波。魏荣爵及其同事对于多孤波，特别是双孤波的产生、运动及相互作用进行了一系列的理论和实验研究，他们甚至观察到由于简正方式的相互竞争而可能导致混沌状态出现，由于这类孤波是限制在小范围内的运动，故有人称这为非传播性孤波。

关于这个问题的理论研究是先求深水问题的解(见15.3节)，在三阶近似下得到了非线性薛定谔方程，可是以上讨论这个方程的解时仅仅涉及行波解，因而还不能直接用来分析本节所提到的非传播性孤波。针对这一问题的理论研究工作首先由拉拉扎(Larraza)和普特曼(Putterman)进行了工作，他们假设参量激励恰恰抵消了系统的耗散损失，即在方程中认为外力和耗散项相互抵消，求解流体学方程组的有关边值问题，采用微扰法准确到三阶近似，由可解条件得到NLS型方程，其表达式为

$$
2\mathrm{i}\omega u_t - C^2u_{xx}+[A|u|^2+B]u=0 \tag{15.8.1}
$$

式中，A，B和C为常数，2ω为参数激励角频率。当频率、振幅等满足一定的关系时，可以得到“驻波型”的孤波解，它不同于(15.4.8)式的那个行波解，即在sech函数中的容量不含t。值得注意的是，(15.8.1)式比(15.4.4)式多了一项B_u,故这里称为它为NLS型方程。不过，在(15.8.1)式中，令

$$
u = v\mathrm{e}^{\mathrm{i}BT/2\omega} \tag{15.8.2}
$$

则可将它化成(15.4.4)式，即为通常的NLS方程。迈尔斯(Miles)将弱阻尼项和参量激励项引入流体力学方程组中，适当地计及液体的质量守恒，用变分法求解了该问题，得到相应的孤波解(“驻波型”的)。

魏荣爵及其同事用多标微扰法求解了该问题，在三阶近似下也得到了形如(15.8.1)式的方程，用数值法求解了所得方程的两个束缚态非传播型孤波解，求出了它们的相互作用周期。

本章我们讨论了 KdV 问题、NLS 问题，也简略地讨论了 sKG 问题，在引入它们的解的开始阶段，总是先化归椭圆积分，用椭圆函数来表示解。显然，可以这样做的前提条件是能将有关方程化成变量分离的可积形式。但是很多方程未必能有这样的方便。

在线性问题中，傅里叶变换求解边值问题是一种很有效的措施，而在非线性问题中是否存在相应的变换呢？散射反演变换似乎带来了希望，例如本章所讨论的三种方程都可以通过这种变换求得解答。从散射反演理论的发展来看，GGKM 的工作是开创性的；而拉克斯的理论总结则给扎哈罗夫等得到突破性的成就开辟了道路和指出了方向；而阿布洛维奇的方法使得对算符 L 和 B 的寻求更加方便。但是在寻求这些算符的过程还存在一定的任意性(如对 $q(x,t)$，$r(x,t)$的选取)，这还需要进一步公式化。

参 考 文 献

[1] 钱祖文. 近代声学中的两个重要课题. 声学技术, 1988, 7：15~18

[2] Scolt A C, Chu F Y F,Mclaughlin D W. The soliton: a new concept in applied science. Proc IEEE, 1973, 61：1443~1482；Taniuti T, Nishihara K. Nonlinear waves.Pitman Advanced Publishing Program,1983

[3] 梅强中. 水波动力学. 北京：科学出版社,1984

[4] Whitham G B. Linear and nonlinear waves. New York: John Wiley & Sons Inc,1973

[5] Gelfand I M, Levitan B M. On the determination of a differential equation from its spectral function. Am Math Transl, 1951, 1(2): 253~304

[6] Zakharov V E. Kinetic equation for solitons. Soviet Phys JETP, 1971, 33: 538~541

[7] Zakharov V E, Shabat A B. Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media. Soviet Phys JETP, 1972, 34: 62~69

[8] Ablowitz M J. Nonlinear-evolution equation of physical significance. Phys Rev Lett, 1973, 31: 125~127

[9] Eckhaus W, Van Harten A. The invese scattering transformation and the theory of solitous. Elserier: North Holland Publishing Company,1981

[10] Wu J R, Keolian R, Isadore R. Observation of a non-propagating hydrodynamic soliton. Phys Reu Lett, 1984, 52: 1421~1424

[11] Larraza A, Putterman S J. Theory of non-propagating surface-wave solitons. Fluid Mech, 1984, 148: 443~499

[12] Miles J. Parametrically excited solitary waves. J Fluid Mech, 1984, 148: 451~460

[13] Wang B R, Zheng X Y. The solitary wave and interaction in a round trough. WESTPAC III 88, Shanghai, 1988, 33~36

[14] Wei R J. Contemporary nonlinear acoustics at Nanjing University. Proc China-Jppan Joint Conference on Ultrasonics, Nanjing, 1987.13~18

[15] Wei R J, Wang BR, Mao Y, et al. Further investigations of nonpropagating hydrodynamic

soliton in rectangular trough with partitions and different dimensional ratio. WESTPAC II 85, Hong Kong ,1985,198,199

[16] Wei R J, Wang B R, Mao Y, et al. Some problems of contemporary nonlinear acoustics: forced standing solitons and their unique properties. WESTPAC III 88, Shanghai,1988, 1: 11~18

[17] Wei R J, Wang X L,Xu Y G. From oscillating tank experiment to solitons and chaos. *In*. Hamilton M F ,Blackstock D.T. Frontiefs of nolinear acoustics, Proc 12 th ISNA. Elsevie Science Publishers Ltd, 1990, 371~376

[18] Wei R J.Wang B R, Mao Y, et al. Further investigation of nonpropagating solitons and their transition to chaos. Jour Acoust Soc Am, 1990, 88: 469~472

[19] Yan J R, Huang G X. Theory of nonlinear-propagating solitary waves on surface of fluid in a rectangular trough. WESTPAC III 88, Shanghlai, 1988,37~40

[20] Lax P D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary wave. Commun Pure Appl Math, 1968, 21: 467~490

[21] Кадомцев Б Б. Петвиашвили В И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах. ДАН СССР, 1970, 192: 753~756

[22] Дрюма В С. Об аналитическом решении двумерного уравнения кортевега-девриза(кдв). Письма в ЖЭТФ, 1974, 19: 753~755

第 16 章　声学中的混沌

很难给“混沌”一个确切的定义，顾名思义，不外乎完全无序，极端混乱，以至于不可捉摸，而本章要讨论的一类问题是被称为确定性的混沌。初看起来，这个名词似乎有点自相矛盾，因为要讨论的问题既然是混沌的，又何来的“确定性”？可是宇宙间的很多现象偏偏就是如此。就以湍流作为例子来说吧，当流动的雷诺数较小时，流体做分层流动，流点沿着流线做有规的运动，也就是说，运动规律是已知的，从而是确定性的。但当流动的控制参数——雷诺数不断增大，一旦超过某个极限值时，运动便逐渐发展成为湍流。当然，混沌也好，无规也好，尚不能视为绝对不可知，它们或多或少地会呈现一定的统计规律性，本章不想研究这个问题，而是要探索这种无规无序的混沌现象是怎样从那些与它相关联的有规有序运动发展起来的。

我们不妨回忆一下以往的无规现象，它总是在某系统中加进某些随机因素(如随机噪声)使得系统成为随机的，而混沌系统则是在确定性的系统中由外界的控制参数改变发展成无规状态的；因为它是通过演变方程的关系发展起来的，即使进入混沌状态它仍服从这个关系，这两点与随机过程论所研究的范围有本质的不同。换句话说，随机过程论只研究随机系统变化的情形以及它服从于什么统计规律，而不管它是怎么成为随机系统的。而混沌这门科学却是着重研究确定性的系统通过非随机的外界影响(控制参数)逐步发展到无规状态的过程及其进一步发展的情形。换句话说，本章讨论的混沌是在确定的非线性系统上加进确定性的外界因素(控制参数)发展起来的，而通常的随机系统是在一般系统(线性的或者非线性的)加进外界随机因素发展起来，本章要研究的内容只是前者。

近年来混沌问题的研究已遍布于物理学、电子学、化学、生物学以及经济学等有关的分支，本章只讨论声学中的混沌问题以及有关的基本知识，更一般的问题请参看有关专著(例如文献[1])。

16.1　几个混沌现象

1. 对流实验发展为混沌

研究湍流的一个著名的实验是瑞利-贝纳尔(Bènard)的对流实验，这个实验是在水槽的底部加热，在水中形成温度梯度，从而形成对流，一旦温度梯度超过某

个极限值时，会逐渐形成湍流[2]。

另一个有趣的现象是大气中 Lorenz 的“蝴蝶效应”[3]，它强烈地依赖于扰动的初始条件，也是过渡到混沌的一个非常重要的事例。

2. 声空化谱发展为混沌

劳特博恩(Lauterborn)和克拉默斯(Cramer)利用高声强系统研究空化气泡的频谱，换能器的激励频率为 22.56kHz，逐步提高声强使之产生空化，用一个宽带水听器接收空化噪声，对接收信号进行谱分析，不仅观察到各阶谐波，而且还有二分频波、四分频波、八分频波等，继续加大推动功率，则逐渐出现连续谱[4, 5]，其结果见图 16.1。

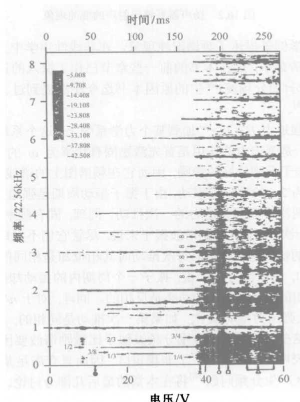


图 16.1　声空化谱

3. 扬声器系统的混沌现象

魏荣爵等用椎形扬声器辐射声波，用传声器接收声音，并通过 FFT 分析，当扬声器上的推动电压超过某个数值后，开始出现混沌现象[6, 7]。频谱分析结果见

图 16.2.

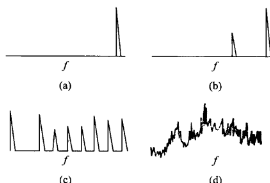


图 16.2　扬声器系统辐射声的混沌现象

上述两个声学例子描述了频谱混沌现象。在非线性声学中人们对于谐波的产生原因已经是很清楚了，这在本书的前一些章节已作了深入的讨论；但对于比基频还低的频率成分(如分频波)产生的原因本书迄今还没提到过。同样的现象也出现在打击乐器上[8]。

如果有一个强迫力 $F=F_0e^{j\omega t}$ 加到某个力学系统上，这个系统由各种固有频率的谐振子组成，于是强迫力的作用是首先激励固有频率为 ω 的振子，由于两者频率相同，故这个振子受到最好的激励，因而它在频谱图上的谱线最高。其次我们来看一下固有频率为 2ω 的振子的振动。由于振子振动周期是强迫力周期的一半，这表明振子每振动两次才受到强迫力的一次推动。同理，固有频率为 $n\omega$ 的振子，每 n 个周期被推动一次。因此，对于谐波振子来说，尽管它们不是每振动一次就被推动一次而且推力的快慢也不同，但每次推动时其相位却是相同的。而分频波情况就不一样了，例如，对于二分频来说，振子一个周期内的振动却被推动两次，如果第一次推动是同相的，则第二次推动必是反相的。同理，对于 n/m 次分频($m>n$)来说，振子振动 n 次强迫力推动 m 次，如果第一次推动是同相的，则其他 $m-1$ 次都不一定同相。从这些地方看来，激励分频波似乎比激励谐波要困难一些。通过对马蒂厄方程求解表明，分频波产生于非稳定区，因而只有满足某些条件才可能产生。关于非稳定区产生分频问题[18]将在本章的最后几部分讨论。

16.2　分 岔 现 象

对于线性振动问题，一个本征值对应于一个本征函数，事实上，其定解问题为

$$u''(x)+\lambda u=0 \tag{16.2.1}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{16.2.2}$$

本征函数为

$$u_n = A_n \sin n\pi x$$

本征值为

$$\lambda = n^2\pi^2 \tag{16.2.3}$$

(16.2.3)式表明，每个 n 对应一个 A_n，即每个 λ 对应一个 u_n，其谱见图 16.3，由图可知，这种情况无分岔现象。

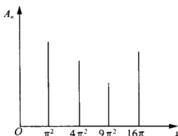


图 16.3　线性振动问题的本征函数与本征值的关系

对于非线性边值问题，情况就不一样了，如下述定解条件：

$$u''(x) + \left[\lambda - 2\int_0^1 |u(x)|^2 \, dx\right] u(x) = 0 \tag{16.2.4}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{16.2.5}$$

令(16.2.4)式方括号中的量为 α，于是有 $u''(x) + \alpha u(x) = 0$ (16.2.6)

显然，仅当 $\alpha = n^2\pi^2 (n = 1, 2, \cdots)$ 时，上述边值问题才有非零解，即

$$u(x) = A\sin(n\pi x) \tag{16.2.7}$$

其中

$$\alpha = \lambda - 2\int_0^1 |A|^2 \sin^2(n\pi x) dx = \lambda - |A|^2 = n^2\pi^2 \tag{16.2.8}$$

或者

$$|A| = \pm\sqrt{\lambda - n^2\pi^2} \tag{16.2.9}$$

图 16.4 表示了$|A|$与λ的关系，这个图表明，一个λ对应于 $2n+1$ 个$|A|$，此即为一种分岔现象，而$\lambda = n^2\pi^2$点称为分岔点，几乎各种非线性问题都会出现分岔现象，从而使得λ和 A 出现多值关系。

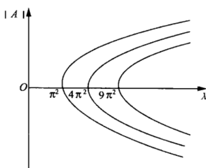


图 16.4　λ 和|A|的分岔图

16.3　时间序列与混沌[9]

一般说来，某个系统在一定的控制参数的情况下，随时间的变化规律用一个所谓演变方程来描写，即

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = F_\lambda\left[x(t)\right] \tag{16.3.1}$$

为简单起见，这里仅讨论一维演变方程，式中的F_λ为依赖参数λ的函数，而这类演变方程可以用某个迭代形式的时间序例表示，即

$$x_{n+1} = f_\lambda(x_n) \tag{16.3.2}$$

若用数值计算对上式进行迭代，每次迭代的结果形成一个(时间)序列，x_1, x_2，…，x_n，…如果$\lambda = \lambda_1, n$充分大，存在一个x^*，使得$x_{n+1} = x_n = x_n^*$，而

$$x_n^* = f_{\lambda_1}(x_n^*) \tag{16.3.3}$$

则$x = x_n^*$称为迭代方程(16.3.3)的一个不动点，只要$\lambda = \lambda_1$不变，则不动点x_n^*是稳定的。如果$x_1, x_2 \ldots \in \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n$为 n 维实数空间，则将该空间的稳定不动点x_n^*称为吸子(定义见后)，它吸引了该空间的若干条轨道，或者说x_n^*是它周围点集的极限值。

如果吸子不是一个孤立点，而由 n 个不动点所组成，即$x_{n,1}^*\ x_{n,2}^*, \cdots, x_{n,n}^*$使得

$$x_{n,2}^* = f_{\lambda_n}(x_{n,1}^*),\quad x_{n,3}^* = f_{\lambda_n}(x_{n,2}^*),\cdots,$$

$$x_{n,n}^* = f_{\lambda_n}(x_{n,n-1}^*),\quad x_{n,1}^* = f_{\lambda_n}(x_{n,n}^*)$$

或者说，这一组不动点经过 n 次周期性的循环(简称循环)并回到 $x_{n,1}^*$，这样的吸子称为 n 点有限环，若将只有一个不动点的吸子的循环周期用 1 表示，则 n 点有限环的周期为 n。

前面的叙述告诉我们，当一个非线性系统的控制参数变化时，其状态由不动点发展为极限环。根据经典力学的方法，系统的状态演变可以用所谓态空间的图形来描述，或者将这些图形称为轨迹，态空间的维度因系统而异，如在哈密顿系统中，它具有 n 个广义坐标和 n 个广义动量，其维数为 $2n$。在态空间中不动点是一个点，极限环是一个闭合环，用数学语言，可以称它们为态空间的集合，并且冠以吸子的名称，这是一种形象化的名词，因为从形式来看，空间的各条轨迹似乎被它们所“吸引”。不动点意味着系统的状态不随时间改变，在物理上对应于一个系统处于静止状态。一个极限环在态空间是一条闭合轨道，其循环“周期”是有限值，它表明物体在做周期运动(不一定是简谐的)。更复杂的一种吸子称为环状圆形纹面(torus)，当系统以两个不可约的频率振动时在态空间即可产生这种轨迹，显然，这种运动属于准周期性的，最重要的一种吸子称之为奇异吸子(strange attractor)，又称为混沌吸子，它在态空间具有自相似结构，其维数不为整数，且对初始条件很灵敏，这些是与其他吸子的重要区别，关于吸子的定义将在以后讨论，这里只是形象化地叙述。

当系统的控制参数改变时，系统的吸子将发生变化，旧的吸子可能消失，新的吸子产生，也可能除了旧的吸子以外，还出现新的吸子，通常将这种变化称为分岔，图 16.5 给出三种典型的分岔的例子。第一种分岔属于霍普分岔，它由不动点过渡到极限环或者有限环；第二种属于鞍-结分岔(saddle-node bifurcation)，它由一个极限环过渡到另一个极限环；第三种属于倍周期分叉，它由周期为 T 的极限环过渡到周期为 $2T$ 的极限环。到目前为止，实验和理论表明，这三种分岔可以过渡到混沌，吕埃勒(Ruelle)，塔肯斯(Taken)和纽豪斯(Newhouse)证明，系统通过有限次的霍普分岔途径可以过渡到混沌。由于这种分岔是准周期的，故系统具有若干个不可约的频率做准周期振荡有可能达到混沌态，两个旋转柱之间流动(泰勒(Taylor)-库埃特(Couette)流)实验观察到这个现象。鞍-结分岔过渡到混沌的途径中包括一种称为间歇式途径(intermittency route to chaos)，它是由波米恩(Pomean)和曼纳维尔(Manneville)提出的，这个途径的特点是控制参数 λ 接近临界参数 λ_c 时，系统在态空间的轨迹作长时间的规则振荡，系统同时还存在混沌性的振荡，随着从分岔点 λ_c 到混沌区的 λ 值的距离(即 $|\lambda-\lambda_c|$)增大，规则振荡越来越弱，混沌振

荡越来越强直到前者消失而间歇地进入混沌状态。鞍-结分岔的另一种分岔途径认为系统中同时存在几个吸子，即同时存在规则吸子(不动点，极限环)和奇异吸子，随着控制参数的变化直接过渡到混沌，不出现间歇过程。倍周期分岔途径则随着控制参数的变化系统在态空间的轨迹是不同周期的极限环，每次的周期是前一极限环周期的两倍，经过足够多次的分岔过渡到混沌，这个途径的论述有很多人的贡献，下面仅详细介绍费根鲍姆(Feigenbaum)所研究的途径。很多实验也证实了这种分岔途径，如气泡空化及扬声器中产生的混沌等。

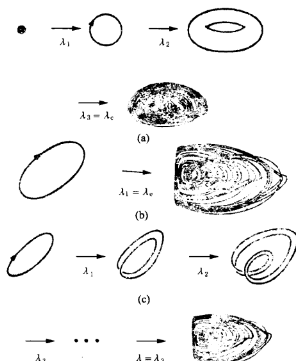


图 16.5　三种典型分岔示意图

(a)霍普分岔；(b)鞍-结分岔；(c)倍周期分岔

下面我们举一个 2^n 分岔的例子。

最常见于文献中的一个例子是描写生物群体生灭的动态方程，费根鲍姆研究了方程

$$\left.\begin{aligned} f_b(x) &= 4bx(1-x) \\ 0 &< b \leqslant 1 \end{aligned}\right\} \tag{16.3.4}$$

显然，当控制参数 b 满足 $0<b<\frac{1}{4}$ 时，存在一个不动点，它是 $x_{n+1}=f_b(x_n)$ 与 $x_{n+1}=x_n$ 的交点，这个不动点为 $x_{n,1}^*=0$；但当

$$\frac{1}{4}<b<1$$

时，它们的交点除了 $x_{n,1}^*=0$ 以外，至少还有另一个不动点

$$x_{n,2}^*=1-\frac{1}{4b} \tag{16.3.5}$$

现在我们来研究不动点稳定性的判据。

设不动点 x^* 满足 $x^*=f_b(x^*)$，在稳定时有 $\bar{x}_n=x^*$，当受到扰动时 $x_n=\bar{x}_n+\delta_n=x^*+\delta_n$ 于是有 $x^*+\delta_{n+1}=f_b(x^*+\delta_n)\approx f_b(x^*)+f_b'(x^*)\delta_n$，由此可得

$$\frac{\delta_{n+1}}{\delta_n}=f_b'(x^*) \tag{16.3.6}$$

如果 $|f_b'(x^*)|>1$，则 $\delta_{n+1}>\delta_n$，这表明在 f_b 的作用下，离不动点很近的那些点之间的距离越来越远，由此可见，这个不动点是不稳定的，但当 $|f_b'(x^*)|<1$ 时，则不动点 x^* 是稳定的。根据上面的结果可知，$f_b'(x_{n,1}^*)=4b$，$f_b'(x_{n,2}^*)=2(1-2b)$，所以当 $b<\frac{1}{4}$，只有一个不动点 $x_1^*=0$，$f_b'(0)<1$，故 $x_{n,1}^*=0$ 是稳定的。当 $\frac{1}{4}<b<\frac{3}{4}$，有两个不动点，这时 $x_{n,2}^*=1-\frac{1}{4b}$ 是稳定的，$x_{n,1}^*$ 不稳定。当 $b>\frac{3}{4}$ 时，两个不动点皆不稳定。

现在我们来研究 $f_b(x)=4x(1-x)$ 的迭代图形。显然，在 $x=\frac{1}{2}$ 处有一个极大值，并且当 $b<\frac{1}{4}$ 时，只有一个不动点 $x_{n,1}^*=0$，当 $\frac{1}{4}<b<\frac{3}{4}$ 时，除 $x_{n,1}^*=0$ 这个不动点外，至少还出现第二个不动点如(16.3.5)式所表示，显然，这是属于 2 点有限环的情况。为了研究 4 点有限环的情形，我们来看一下二次迭代的图形，即

$$f_b^{(2)}(x)=f_b[f_b(x)]=4bf_b(x)[1-f_b(x)] \tag{16.3.7}$$

显然，在上式中当 $f_b(x)=\frac{1}{2}$，$f_b^{(2)}(x)$ 有极大值，这时

$$[f_b^{\,2}(x)]_{\max}=b$$

由(16.3.4)式可知 $f_b(x)=1/2$ 有两个根，这表明(16.3.7)式的图形有两个极大值，也就是说，只要 $b>3/4$，这个图形与 $x_{n+1}=x_n$(直线)的交点就至少有 4 个，即这时至少存在 4 个不动点

$$x_{n,1}^{*},\quad x_{n,2}^{*},\quad x_{n,3}^{*},\quad x_{n,4}^{*}$$

这表示出现 4 个点有限环，对应的周期为 4，图 16.6 表示了这种情形。

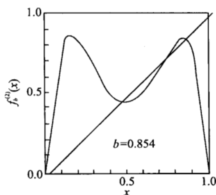


图 16.6　$f_b^{(2)}(x)$ 的图形

当 b 继续增大以及继续对 $f_b^{(4)}(x), f_b^{(8)}(x), \cdots$，加以研究可知，会出现 8 点有限环，16 点有限环以至于 2^k 点有限环等，而控制参数 b 分别取 $b_{k-1}, b_k, b_{k+1}\cdots$，理论研究表明，如果定义

$$\alpha_k=\frac{b_k-b_{k-1}}{b_{k+1}-b_k} \tag{16.3.8}$$

当 $\alpha_k|_{k-\infty}\to 4.669201\cdots$，或者 $b_k\approx 0.892$ 时周期性的循环性丧失，或者说周期趋向无限大。

根据 $f_b^{(2k)}(x)$ 与 x 的映射关系可知，一个 x 值与一个 $f_b^{(2k)}(x)$ 的值相对应，但逆映射不存在，因为一个 $f_b^{(2k)}(x)$ 对应 2^{k+1} 个 x 值，不是一一对应，由此可见，若迭代按 t 增大的方向进行是唯一的，但将时序逆转，即沿相反时序进行逆迭代就不是唯一的，非线性函数的多值性导致逆映射不一一对应或者说逆映射不存在，这是非线性系统过渡到混沌的一个值得注意特征。

16.4　耗散系统及其吸子[10~15]

在统计力学中人们早已熟知，保守系统在相空间的密度不变，因而对一定数量的代表点来说，在相空间占据的体积不变(刘维定理)。但对于耗散系统，相流动的体积会收缩，即相体积会收缩成低维数流形，下面讨论耗散系统的吸子。

假定我们讨论的相空间是一个 m 维实数空间 $\mathbf{R}^m$，设其中有一个超体积(以后简称体积)$V\in \mathbf{R}^m$，使得如果存在 $Y\in V$，则对所有的时间 $t>0$ 有 $T^t\,Y=X(Y,t)$恒在 V 中，即 $T^t\,Y\in V$，这里算符 T^t 表示相空间的“流”。因为我们讨论的是耗散系统，故在“流动”过程中 T^t 使得相体积在减小，当 $t\to\infty$，集合 T^tV 减小成一个集合

$$W=\bigcap_{t>0}T^tV$$

其体积收缩到零。当然，相体积为零不一定是个点，也许是一个超曲面，总之是低维数的流形。故当 $t\to\infty$，时，从 $Y\in V$ 出发的每个解曲线都趋近于集合 W。如果 $Y\in V/W$(即 Y 属于 V 但不属于 W)，则 Y 称为瞬变的(这里将不讨论这一情况)，我们将着眼于 W 中的全部或其中几部分的运动，假设那些趋近于 W(但又不在 W 中)中的一些轨道的性质类似于 W 中的某一部分，则 W 中的这一部分称为吸子，经过这些阐明之后，我们引入吸子的一种定义：对于“流” T^* 来说，吸子是一个紧集 X 它满足以下几点：

(1) 在 T^t 作用下 X 不变，即 $T^t\,X=X$；

(2) X 有收缩的领域 U，$U\supset X$，当 $t>0$ 时使得 $T^t\,U\subset U$ 和 $X=\bigcap_{t>0}T^tU$；

(3) X 上的“流” T^t 是递归的和不可分裂的，前者意味着在 X 上 T^t 不是瞬变的，后者表示 X 不能分裂成两个非平凡的闭合的不变部分。

根据上述定义，对照图 16.7 可知，在 $W=\{x_1,x_2,x_3\}$ 中，x_1,x_2 是吸子，x_3 不是吸子而是越过点。不动点和有限环这类吸子称为平凡吸子，我们还要讨论的是另一类，称为奇异吸子，在定义这种吸子之前，我们首先定义一个被称为吸引源头(basin of attraction)的集合 A，如果 X 是一个吸子，则它的吸引源头定义为那些初始点的集合 x，以使得 $T^tx|_{t\to\infty}\to X$。我们现在来引入奇异吸子的定义：可以找到吸引源头上的两个初始点 x_1，$x_2\in A$，在充分长的时间 t 之后，它们在吸子集合 X 上分得很开，或者用一句话来概括，它们对初始条件很敏感，具有这种性质的吸子称为奇异吸子。洛伦兹对大气湍流作数值计算时首先得到了这种吸子，尽管当

时还没有这个名称。

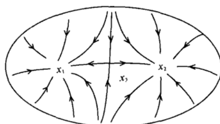


图 16.7 吸子示意图

吸子并不一定是个点，它在态空间的维度 D_0 不一定为零(除了不动点 $D_0=0$ 以外)。例如，对于有限环来说，$D_0=1$，但对于奇异吸子而言，根据分形维度(fractal dimensions)的定义，其豪斯多夫(Hausdorff)维度是 D_0 不为整数，其点集 $A\subset \mathbf{R}^m$ 的豪斯多夫维度是(见第 18 章)

$$D_0=\lim_{R\to 0}\frac{\log M(R)}{\log(1/R)}$$

式中，R 为 m 维“立方体”的棱长，$M(R)$是覆盖点集 A 所需这类“立方体”的最小数目，对于康托尔(Cantor)集来说，$R=3^{-k}$，$M(R)=2^k$，$k=0,1,2$，…，于是

$$D_0=\lim_{x\to\infty}\frac{\log 2^k}{\log 3^k}=0.6309$$

也就是说康托尔集存在奇异吸子。对于高维问题，使用 D_0 来判别不太方便，此时，往往应用所谓相关维度，D_2，更便于作数值计算，本书不作进一步的讨论。

除了上述的判别方法之外，历史上还曾应用李亚普诺夫(Lyapunov)数 λ 来判别，当 $\lambda<0$，吸子为不动点；$\lambda=0$，吸子为有限环；$\lambda>0$，吸子为奇异吸子。关于 λ 的定义本书不给出，读者可参考有关文献。

奇异吸子有时也称为混沌吸子，能够过渡到混沌的系统，一定存在这种奇异吸子。劳特博恩等对气泡振动计算了它的 D_2 (相关维度)，倪皖孙等计算了扬声器的 D_0 及 λ，都分别证明了各自的系统存在奇异吸子，因而它能够通向混沌就不难理解。

从频谱分析的角度来看，系统过渡到混沌象征着系统的频谱趋向连续谱。而上述的两个声学混沌问题中，其推动信号的频率是一定的，按照本书前几章的讨论，只涉及了谐频及和差频，如果只是这些成分构不成连续谱，则还要研究产生分频成分的系统。最典型的是二分频系列，它与倍周期分岔联系起来，其中最熟知

的例子是用马蒂厄方程研究法拉第水波(分频)实验，关于这方面的知识将在下面讨论。

16.5 声扬中的气泡分岔和混沌[4, 5, 16~18]

在第 13 章中我们讨论了空化气泡的振动，完全没有涉及产生分频波的情况。为了阐明分频振动产生的机理，需要讨论气泡的非稳定振动，为了简明起见，我们的模型是气泡在不可压缩流体中振动，并且在式(13.2.12)中忽略表面张力及蒸气压力，于是(13.2.12)式可写为

$$R\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{P_0}{\rho}\left[1-\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma}\right]+\frac{P_\mathrm{m}}{\rho}\cos\omega t \tag{16.5.1}$$

这里我们用 $P_\mathrm{m}\cos\ \omega t$ 代替(13.2.12)式中的 $P_\mathrm{m}\sin\ \omega t$，这只不过相当于在时间轴上作一个固定的平移而已。将(16.5.1)式量纲为一化，即令

$$\left.\begin{aligned}r=\frac{R}{R_0},P=\frac{P_\mathrm{m}}{P_0},\tau=\omega t\\ \beta=\frac{\omega}{\omega_\mathrm{r}},\ \omega_\mathrm{r}^2=\frac{3\gamma P_0}{\rho R_0^2}\end{aligned}\right\} \tag{16.5.2}$$

这里的符号说明见第 13 章。将这些代换关系代入(16.5.1)式中可得

$$3\gamma\beta^2\left[r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right]+1-r^{-3r}+P\cos\tau=0 \tag{16.5.3}$$

用微扰法求解上式，容易得到一个周期解

$$r=A_0+A_1\cos\tau+A_2\cos2\tau+\cdots \tag{16.5.4}$$

式中，A_0,A_1，…可表示为

$$\left.\begin{aligned}A_0=1+[(3\gamma+1-\beta^2)/36\gamma^2(\beta-1)^2]P^2+O(P^4)\\ A_1=P/3\gamma(\beta^2-1)+O(P^3)\\ A_2=O(P^2)\\ A_3,A_4,\cdots\text{不超过}O(P^3)\text{的量级}\end{aligned}\right\} \tag{16.5.5}$$

现在我们来研究解(16.5.4)的稳定性，其想法如下。使原来的解受到某种扰动，然后再看这种扰动的发展趋势。如果其中受到扰动的部分越来越大，则这种解就是不稳定的。在数学上,可以在(16.5.3)式中用 $r(\tau)+\xi(\tau)$ 来取代 $r(\tau)$, $r(\tau)$ 由(16.5.4)式表示，它仍是(16.5.3)式的未扰动解，这样就得到扰动量所满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{3}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\tau}+\left[\beta^{-2}r^{-(3\gamma+2)}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\tau^2}\right]\xi=0.$$

作变换

$$y=r^{\frac{3}{2}}\xi \tag{16.5.6}$$

代入上式，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2}+\frac{1}{6\gamma\beta^2r^2}[(6\gamma-1)r^{-3\gamma}+1+P\cos\tau]y=0 \tag{16.5.7}$$

这个方程是属于希尔(Hill)型的方程或者称为马蒂厄方程，它的解 $y(\tau)$ 代表了相对于归一化气泡半径的偏差，如果它随时间无限增长，则表明周期解 $r(\tau)$ 是个非稳定解。根据希尔解的性质(见 16.6 节)可知，它的解存在稳定区和非稳定区，而在非稳区的解显然是不稳定的，特别是可以产生分频振动。

在(16.5.7)式中作变换

$$z=\frac{1}{2}\tau \tag{16.5.8}$$

代入(16.5.7)式，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}z^2}+[\vartheta_0+2\vartheta_2\cos 2z+2\vartheta_4\cos 4z+\cdots]y=0 \tag{16.5.9}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_0&=\frac{4}{\beta^2}+\left[\frac{12\gamma+8+6\gamma\beta^2-\beta^2}{18\gamma^2\beta^2\left(\beta^2-1\right)^2}\right]P^2+O(P^4)\\ \vartheta_2&=\left[\frac{\beta^2-6\gamma-4}{3\gamma\beta^2(\beta^2-1)}\right]P+O(P^3)\\ \vartheta_4&=O(P^2)\\ \vartheta_6,\vartheta_8,&\cdots,\text{不超过}O(P^3)\text{的量级}\end{aligned}\right\} \tag{16.5.10}$$

根据希尔方程的性质(见 16.6 节)，(16.5.9)式的解存在一连串的稳定区和非稳定区，这取决于 ϑ_2，ϑ_4，⋯的值，例如，当 ϑ_0 处在下述二个极限值之间时是产生二分频波的区域(非稳定区)：

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_{0+}&=1+\vartheta_2-\frac{1}{8}\vartheta_2^2+O(P^3)\\ \vartheta_{0-}&=1-\vartheta_2-\frac{1}{8}\vartheta_2^2+O(P^3)\end{aligned}\right\}\tag{16.5.11}$$

将(16.5.10)式代入(16.5.11)式可得，当 β^2 处在下述两个值 $\beta^2{}_+$，$\beta^2{}_-$ 之间时解处在非稳定区，即产生二分频波的区，而 $\beta^2{}_\pm$ 可表为

$$\beta^2{}_\pm=4\pm\frac{2}{3}P+\left[\frac{-87\gamma^2+96\gamma+16}{648\gamma^2}\right]P^2+\cdots\tag{16.5.12}$$

用 $\beta=\omega/\omega_r$ 作横坐标，$P=P_m/P_0$ 为纵坐标作 $P-\beta$ 图(图 16.8)，以 γ 为参数，显然，在 $\beta\approx 2$ 处，P 最小，这表明当气泡的小振幅共振频率是声激励频率的一半时，P_m 最小，即 $\omega_r=\dfrac{\omega}{2}$ 的振动最易激励。图中的 V 形区是非稳定区。下面将要证明，当 y 很小时，方程(16.5.9)的近似解可以写为

$$y(t)=e^{\mu\omega t/2}\sin\left(\frac{1}{2}\omega t+\sigma\right)\tag{16.5.13}$$

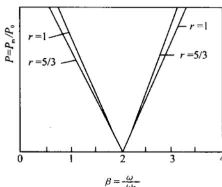


图 16.8　二分频区的近似图

式中 σ 是参数，而

$$\mu^2=\frac{1}{4}[\vartheta_2^2-(1-\vartheta_0)^2]+O(P^3)$$

或者

$$\mu^2 \approx \left[\left(\frac{P}{6}\right)^2 - \left(\frac{\beta^2-4}{4^2}\right)^2\right] \tag{16.5.14}$$

当 $\beta = 2$ 时，μ^2 达到极小值，这时，$y(t)$ 随时间增长最快，即二分频波最强。

前面讨论了气泡振动产生的倍周期分岔，接下来看一下它如何通过这种分岔途径过渡到混沌，劳特博恩、克拉默斯和帕莱茨(Parlitz)从 KBCG 方程(见 13.3 节)

$$\left(1-\frac{\dot{R}}{C}\right)R\ddot{R} + \dot{R}^2\left(\frac{3}{2}-\frac{\dot{R}}{2C}\right) = \frac{P}{\rho} + \frac{1}{\rho c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(RP) \tag{16.5.15}$$

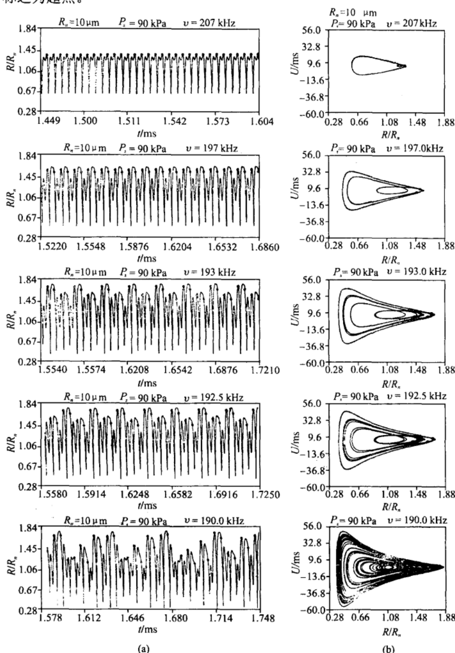
出发，式中

$$P = P_{\mathrm{i}}(R) - \frac{2\sigma}{R} - 4\eta\frac{\dot{R}}{R} - P_0 + P_{\mathrm{v}} - P_{\mathrm{m}}\sin\omega t \tag{16.5.16}$$

$$P_{\mathrm{i}} = \left(P_0 - P_{\mathrm{v}} + \frac{2\sigma}{R_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} \tag{16.5.17}$$

式中，$R = R(t)$ 为气泡的瞬时半径，R_0 为它的静止半径，$\omega = 2\pi\nu$ 为声场的角频率，P_{m} 为声场的压力振幅，P_0 为静压力，P_{v} 为蒸气压力，σ 为表面张力系数，η 为黏滞系数，γ 为气泡中气体的多方指数。他们求方程(16.5.15)的数值解，做出半径为 R 的时间曲线、态空间轨迹（$U-\dfrac{R}{R_0}$ 图)，波因卡(Poincarè)图以及频谱图。这里有若干个控制参数，他们只研究了其中的两个：一个是外声场振幅 P_{m}；另一个是外声场的频率。图 16.9 给出当频率改变时的演变过程，只经过五步即到达混沌态。图 16.9 中第一列上的一系列黑点对应于声场的某个相位值，它们的间隔表示声场的周期。第二列表示态空间的轨迹，由此明显地看出，从单极限环按倍周期分岔途径向混沌过渡的过程。为了比较起见，将图 16.9 与图 16.1(频谱图)并排，当频率改变到第五步时，出现了强的连续谱，很直观地表明了混沌态。第三列是波因卡图，这种图的作法说明如下：在态空间选取一个超平面，当态空间维数等于 3 时，它为通常的平面，将这个超平面称为波因卡截平面，它在空间的法线取向可以方便选取，因为态空间的轨迹由演变方程的解构成，随着时间的发展，轨迹形成有向曲线，在截平面与轨迹相交的集合中只取一部分集合构成波因卡图，这部分集合是轨迹在交点的切线与截平面的法线的交角不超过 $\pi/2$，即只选取轨迹从截平面一侧穿过，从而形成的交点的集合(波因卡图)。显然，这种描述法所需的空间维数

降低一维。例如，态空间的极限环在波因卡图上只是一个点；态空间一条空间曲线，在波因卡图上至多是一条平面曲线或者是一列离散的点列。当然，上面的定义只是就 3 维态空间来说的，如果维数大于 3，则截平面是超平面，交点也是超平面或者称之为超点。



(a)　　　　(b)

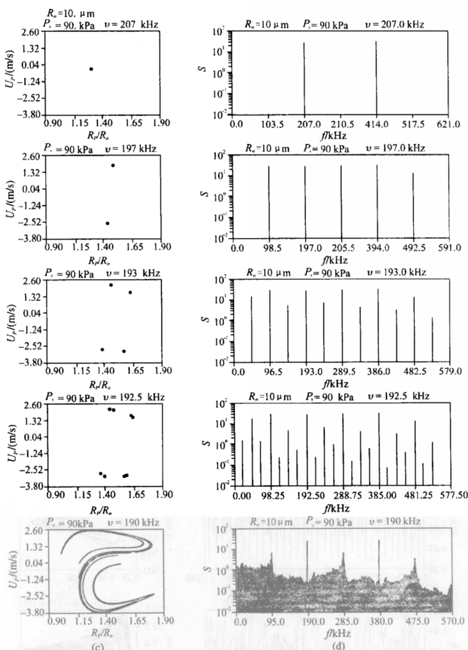


图 16.9　气泡振动通过倍周期分岔过渡到混沌

(a)$R(t)$-t 的图; (b)态空间轨迹

(c)波因卡图; (d)频谱图

16.6　马蒂厄方程[18, 19]

马蒂厄在研究椭圆形膜的边界值问题时，导出一个二阶常微分方程，后来被人们称为马蒂厄方程，其形如

$$\frac{d^2 y}{dz^2}+(a-2q\cos 2z)y=0 \tag{16.6.1}$$

式中, a 和 q 为两个实参数，方程的系数是以 π 或 2π 为周期的。

当 $q=0$ 时, (16.6.1)式退化为

$$\frac{d^2 y}{dz^2}+ay=0 \tag{16.6.2}$$

这个方程是熟知的，其解可写为

$$y=A\cos\sqrt{a}z+B\sin\sqrt{a}z$$

式中, A, B 为常数，当 $a=m^2, m=0,1,2,\cdots$，方程的解组为

$$1,0;\quad \cos z,\sin z;\quad \cos 2z,\sin 2z;\quad \cdots \tag{16.6.3}$$

因而解为

$$y_m=A_m\cos mz+B_m\sin mz \tag{16.6.4}$$

当 $q\neq 0$, (16.6.1)式的解要比(16.6.3)式所列出的解组复杂得多，下面将分几种情况来讨论。

1. 整数阶的马蒂厄函数

在很多实际问题中, (16.6.1)式所描写的系统称为参量激励型的, q 代表激励幅度的大小，当这种激励并不十分强烈时，可以将它作为数学处理中的微扰参数。若 a 不能表示为某个整数的平方但可以表示为

$$a=m^2+\alpha_1 q+\alpha_2 q^2+\cdots \tag{16.6.5}$$

则显然，当 $q=0$ 时， $a=m^2$ 。当 m=1 时，有

$$a=1+\alpha_1 q+\alpha_2 q^2+\cdots$$

这时，可以认为方程(16.6.1)的解偏离解组(16.6.3)并不太大，于是对应于余弦项的解组可表为(为简便起见，下式 cosz 前的系数已归一化为 1)

$$y=\cos z+qC_1(z)+q^2C_2(z) \tag{16.6.6}$$

这个解表明，当 $q=0$ 时，解退化为(16.6.3)式，这里 a_1,a_2，…，$C_1(z),C_2(z),\cdots$ 待定。将(16.6.5)式和(16.6.6)式代入到(16.6.1)式，将所得的结果按 q 的幂次排列，使得 q^n 前的系数相等，于是有

$$q^0:\qquad \cos z-\cos z\equiv 0$$

$$q:\qquad C_1''+C_1=(1-\alpha_1)\cos z+\cos 3z \tag{16.6.7}$$

$$q^2:\qquad C_2''+C_2=-\alpha_2\cos z-\alpha_1C_1+2C_1\cos 2z \tag{16.6.8}$$

……

先来讨论(16.6.7)式的解，它的右端为强迫项，而第一项的频率与本征振动频率相同，它所对应的解是不收敛的。通过变动参数法求解这个方程可知，对应于这一项有一个特解为 $z\cos z$，称为微扰解的长期项，当 $z\to\infty$ 时不收敛。另外，由于(16.6.1)的解应当是以 π 或 2π 为周期的函数，故这类解不能存在，为此必须要求 $\cos z$ 前的系数为零，即

$$\alpha_1=1 \tag{16.6.9}$$

代入(16.6.7)可得

$$C_1(z)=-\frac{1}{8}\cos 3z \tag{16.6.10}$$

将这些结果代入到(16.6.8)式，得到

$$C_2''+C_2=-\left(\frac{1}{8}+\alpha_2\right)\cos z+\frac{1}{8}\cos 3z-\frac{1}{8}\cos 5z$$

由于解的周期性，也要求长期项消失，即

$$\alpha_2=-\frac{1}{8} \tag{16.6.11}$$

于是解出 $C_2(z)$ 为

$$C_2(z)=-\frac{1}{64}\cos 3z+\frac{1}{192}\cos 5z \tag{16.6.12}$$

重复上述过程便可得到

$$\left.\begin{aligned}\alpha_3&=-\frac{1}{64}\\ C_3(z)&=-\frac{1}{512}\left\{\frac{1}{3}\cos 3z-\frac{4}{9}\cos 5z+\frac{1}{18}\cos 7z\right\}\\ \alpha_4&=-\frac{1}{1536}\\ C_4(z)&=\frac{1}{4096}\left\{\frac{11}{9}\cos 3z+\frac{1}{6}\cos 5z-\frac{1}{12}\cos 7z+\frac{1}{180}\cos 9z\right\}\end{aligned}\right\} \tag{16.6.13}$$

……

将这些结果代入(16.6.5)式和(16.6.6)式，并将所得到的解 y 用一个特定的符号 $ce_1(z,q)$ 表示，将得到的相应的 a 用符号 $a_c^{(1)}$ 表示，即

$$\begin{aligned}ce_1(z,q)=&\cos z-\frac{1}{8}q\cos 3z+\frac{1}{64}q^2\left(-\cos 3z+\frac{1}{3}\cos 5z\right)\\&-\frac{1}{512}q^3\left(\frac{1}{3}\cos 3z-\frac{4}{9}\cos 5z+\frac{1}{18}\cos 7z\right)+O(q^4)\end{aligned} \tag{16.6.14}$$

$$a_c^{(1)}=1+q-\frac{1}{8}q^2-\frac{1}{64}q^3+O(q^4) \tag{16.6.15}$$

$ce_1(z,q)$ 称为一阶椭圆余弦函数或者称为余弦型一阶马蒂厄函数，$a_c^{(1)}$ 为对应于 $ce_1(z,q)$ 的特征数。

现在我们来求(16.6.1)式的另外一个解。当 $q=0$ 时，它是 $\sin z$，于是在 $q\neq 0$ 时可以将它写为

$$y=\sin z+qs_1(z)+q^2s_2(z)+\cdots$$

$$a=1+\beta_1q+\beta_2q^2+\cdots$$

根据相同的方法(其计算过程从略)，最终可得

$$y = se_1(z,q) = \sin z - \frac{1}{8}q\sin 3z + \frac{1}{64}q^2\left(\sin 3z + \frac{1}{3}\sin 5z\right) - \frac{1}{512}q^3\left(\frac{1}{3}\sin 3z + \frac{4}{9}\sin 5z + \frac{1}{18}\sin 7z\right) + O(q^4) \tag{16.6.16}$$

$$a_s^{(1)} = 1 - q - \frac{1}{8}q^2 + \frac{1}{64}q^3 + O(q^4) \tag{16.6.17}$$

$se_1(z,q)$ 为一阶椭圆正弦函数或者称为正弦型一阶马蒂厄函数，$a_s^{(1)}$ 为与 $se_1(z,q)$ 相对应的特征数。值得注意的是，当 q 一定时，分别对应于 $ce_1(z,q)$ 和 $se_1(z,q)$ 的特征数不相等，即 $a_c^{(1)} \neq a_s^{(1)}$，这表明这二个马蒂厄函数不能同时成为方程(16.6.1)的解，或者说它们不能共存，除非 q=0 时才会成为基本解组。但(16.6.1)式应该有两个线性独立解，这要求助于构造独立解的方法，如已知一个解为 $ce_m(z,q)$，与它线性独立的另一个解可以用它们的朗斯基行列式求得，即

$$y(z) = ce_m(z,q)\int^z \frac{\mathrm{d}z}{[ce_m(z,q)]^2} \tag{16.6.18}$$

以上我们求了 m= 1 时的解答，现在我们来求 m= 2 时的解。展开

$$ce_2(z,q) = \cos 2z + qd_1(z) + q^2 d_2(z) + \cdots$$

$$a = 4 + \gamma_1 q + \gamma_2 q^2 + \cdots$$

……

根据同样的方法可以算得

$$ce_2(z,q) = \cos 2z - \frac{1}{8}q\left(\frac{2}{3}\cos 4z - 2\right) + \frac{1}{384}q^2 \cdot \cos 6z + \frac{1}{512}q^3\left(\frac{1}{45}\cdot\cos 8z + \frac{43}{27}\cos 4z + \frac{40}{3}\right) + O(q^4) \tag{16.6.19}$$

$$a_c^{(2)} = 4 + \frac{5}{12}q^2 + O(q^4) \tag{16.6.20}$$

$$se_2(z,q) = \sin 2z - \frac{1}{12}q\sin 4z + \frac{1}{384}q^2\sin 6z - \frac{1}{512}q^3\left(\frac{1}{45}\sin 8z - \frac{5}{27}\sin 4z\right) + O(q^4) \tag{16.6.21}$$

$$a_s^{(2)} = 4 - \frac{1}{2}q^2 + O(q^4) \tag{16.6.22}$$

当 $m=0$ 时，同样可以算得

$$\begin{aligned} ce_0(z,q) &= 1 - \frac{1}{2}q\cos 2z + \frac{1}{32}q^2\cos 4z \\ &\quad - \frac{1}{128}q^3\left(\frac{1}{9}\cos 6z - 7\cos 2z\right) + O(q^4) \end{aligned} \tag{16.6.23}$$

$$a_c^{(0)} = -\frac{1}{2}q^2 + O(q^4) \tag{16.6.24}$$

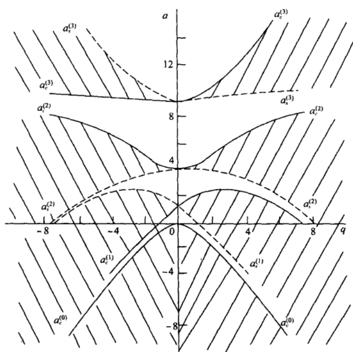


图 16.10　马蒂厄方程稳定解与不稳定解在(a, q)平面上的分布

图中阴影区是不稳定区

更高阶的马蒂厄函数($m \geqslant 3$)解可以类似地得到，这里不一一列出。根据这些结果，我们能够作出$(a_c^{(m)},q)$和$(a_s^{(m)},q)$的图形，图 16.10 给出 $m=0,1,2,3$ 时的(a,q)图示，它表示了(16.6.1)式的稳定解和不稳定解在(a,q)平面内分别占据的区域，图中阴影部分是不稳定解所占据的区域。关于稳定区与不稳定区的划分将在以后讨论。

2.非整数阶的马蒂厄函数

以上我们只讨论了 $a=m^2, m$ 为整数的情形，现在我们来研究 $a=\nu^2, \nu$ 为非整数时的情况。与上面计算方法类似，当 $q=0$ 时，方程(16.6.1)的解组为 $\cos\nu z$ 和 $\sin\nu z$，当 $q\neq 0$，可以写

$$ce_\nu(z,q)=\cos\nu z+\sum_{r=1}^{\infty}q^r C_r(z)$$

$$se_\nu(z,q)=\sin\nu z+\sum_{r=1}^{\infty}q^r s_r(z)$$

$$a=\nu^2+\sum_{r=1}^{\infty}\alpha_r q^r$$

将这些结果分别代入方程(16.6.1)可以分别定出 $C_r(z), s_r(z)$, 及相对应的 a_r，最终得到

$$\begin{aligned}ce_\nu(z,q)=\cos\nu z-\frac{1}{4}q\left[\frac{\cos(\nu+2)z}{(\nu+1)}-\frac{\cos(\nu-2)z}{(\nu-1)}\right]\\+\frac{1}{32}q^2\left[\frac{\cos(\nu+4)z}{(\nu+1)(\nu+2)}+\frac{\cos(\nu-4)z}{(\nu-1)(\nu-2)}\right]+O(q^3)\end{aligned}\tag{16.6.25}$$

$$\begin{aligned}se_\nu(z,q)=\sin\nu z-\frac{1}{4}q\left[\frac{\sin(\nu+2)z}{(\nu+1)}-\frac{\sin(\nu-2)z}{(\nu-1)}\right]\\+\frac{1}{32}q^2\left[\frac{\sin(\nu+4)z}{(\nu+1)(\nu+2)}+\frac{\sin(\nu-4)z}{(\nu-1)(\nu-2)}\right]+O(q^3)\end{aligned}\tag{16.6.26}$$

$$a=a_c^{(\nu)}=a_s^{(\nu)}=\nu^2+\frac{1}{2(\nu^2-1)}q^2+O(q^4)\tag{16.6.27}$$

值得注意的是 $a_c^{(\nu)}=a_s^{(\nu)}$，即两个解组是可以共存的，故可作为二个线性独立解，使得方程(16.6.1)的任何一个解可以由它们的线性组合来表示，即

$$y=A_\nu ce_\nu(z,q)+B_\nu se_\nu(z,q)$$

关于马蒂厄函数的正交归一化问题本书不作讨论，有兴趣的读者可参看有关专著[8]。

16.7　希尔方程和弗洛凯定理[18, 19]

本节讨论所谓希尔方程，其一般形式可表示为

$$\frac{d^2y}{dz^2}+P(z)\frac{dy}{dz}+Q(z)y=0 \tag{16.7.1}$$

式中，$P(z)$ 和 $Q(z)$ 为周期函数，其周期为 Ω。当 $P(z)=0$，$Q(z)=a-2q\cos 2z$ 时，(16.7.1)式退化为(16.6.1)式，故 16.6 节讨论过的马蒂厄方程实为希尔方程的一个特例，因而本节及以后各节所得到的结果完全适用于 16.6 节。

在一般情况下，二阶线性方程有两个独立解 y_1和y_2，(16.7.1)式的任何一个解都可以表为它们的线性组合，即

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \tag{16.7.2}$$

由于 y_1和y_2 线性独立，故它们的朗斯基行列不为零。$P(z)$和$Q(z)$ 的周期为 Ω，若 $y_1(z)$和$y_2(z)$ 是(16.7.1)式的解，则 $y_1(z+\Omega)$和$y_2(z+\Omega)$ 也是它的解，因此可以表之以(16.7.2)的形式，即

$$\left.\begin{aligned}y_1(z+\Omega)&=k_{11}y_1(z)+k_{12}y_2(z)\\ y_2(z+\Omega)&=k_{21}y_1(z)+k_{22}y_2(z)\end{aligned}\right\} \tag{16.7.3}$$

在(16.7.2)式中将 z 用 $z+\Omega$ 代替，则有

$$\begin{aligned}y(z+\Omega)&=C_1y_1(z+\Omega)+C_2y_2(z+\Omega)\\ &=(C_1k_{11}+C_2k_{21})y_1(z)\\ &\quad+(C_1k_{12}+C_2k_{22})y_2(z)\end{aligned} \tag{16.7.4}$$

如果解 $y(z)$ 具有这样的特性，使得当 $z\to z+\Omega$ 时，有

$$y(z+\Omega)=\sigma y(z) \tag{16.7.5}$$

将(16.7.2)式代入上式右端，并将得到的式子代入(16.7.4)式的左端，因为 $y_1(z)$和$y_2(z)$ 线性独立，必有

$$\left.\begin{aligned}C_1k_{11}+C_2k_{21}&=\sigma C_1\\ C_1k_{12}+C_2k_{22}&=\sigma C_2\end{aligned}\right\} \tag{16.7.6}$$

如果 C_1,C_2 有非平凡解，则必有

$$\sigma^2-(k_{11}+k_{22})\sigma+(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})=0 \tag{16.7.7}$$

这是一个二次方程式，一般有两个根，由于k_{ij}是实数，故两个根或者是实根，或者是共轭复根。(16.7.5)式即为弗洛凯定理数学陈述，因为(16.7.7)式总是有解的，所以σ的根总是存在的，于是弗洛凯定理也总是成立的。现在引入另一个参数μ，使得$\sigma=e^{\mu\Omega}$，定义另一个函数$G(z)$，它满足

$$y(z)=e^{\mu z}G(z) \tag{16.7.8}$$

于是有

$$y(z+\Omega)=e^{\mu(z+\Omega)}G(z+\Omega)=\sigma e^{\mu z}G(z+\Omega) \tag{16.7.9}$$

根据弗洛凯定理(16.7.5)，并与(16.7.9)式对比，容易得到

$$G(Z+\Omega)=G(z) \tag{16.7.10}$$

即$G(z)$也是以Ω为周期的周期函数。

16.8 马蒂厄方程解的稳定性[18, 19]

根据弗洛凯定理，马蒂厄方程的一个特解可写为

$$y_1(z)=e^{\mu z}G(z,\sigma) \tag{16.8.1}$$

式中，将$G(z)$写成$G(z,\sigma)$是为了表明参数σ的作用。对于马蒂厄方程(16.6.1)来说，周期Ω是π或者2π。由于$G(z,\sigma)$是周期函数，故可以表示为

$$\left.\begin{aligned}G(z,\sigma)=\sin(z-\sigma)+qh_1(z,\sigma)+q^2h_2(z,\sigma)+\cdots\\ a=1+qf_1(\sigma)+q^2f_2(\sigma)+\cdots\\ \mu=qg_1(\sigma)+q^2g_2(\sigma)+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{16.8.2}$$

将(16.8.1)式和(16.8.2)式代入到(16.8.1)式，将所得到的结果仍按q的幂次排列，使得q幂次前的系数为零，于是有

$$\begin{aligned}&q^0: && -\sin(z-\sigma)+\sin(z-\sigma)=0\\ &q^1: && h_1''+h_1+f_1\sin(z-\sigma)+2g_1\cos(z-\sigma)-2\sin(z-\sigma)\cos 2z=0\end{aligned} \tag{16.8.3}$$

$$q^2: \quad h_2'' + h_2 + 2g_2\cos(z-\sigma) - \frac{3}{4}g_1\cos(3z-\sigma) + (g_1^2 + f_2)\sin(z-\sigma) + \frac{1}{8}\cos 2\sigma\sin(3z-\sigma) + \frac{1}{4}\sin(3z-\sigma)\cos 2z = 0 \tag{16.8.4}$$

利用三角等式：

$$\begin{aligned} 2\cos 2z\sin(z-\sigma) &= \sin(3z-\sigma) - \sin(z+\sigma) \\ &= \sin(3z-\sigma) - \sin(z-\sigma)\cos 2\sigma \\ &\quad + \cos(z-\sigma)\sin 2\sigma \end{aligned}$$

代入(16.8.3)式，容易得到

$$\begin{aligned} h_1'' + h_1 = &-(2g_1 + \sin 2\sigma)\cos(z-\sigma) \\ &-(f_1 + \cos 2\sigma)\sin(z-\sigma) + \sin(3z-\sigma) \end{aligned} \tag{16.8.5}$$

因为$G\ (z,\sigma)$是周期函数，但对应于上式右端第一、第二两项的特解是非周期函数，故必须要求这两项前的系数为零，于是求出

$$g_1 = -\frac{1}{2}\sin 2\sigma, \quad f_1 = -\cos 2\sigma \tag{16.8.6}$$

将这个结果代入(16.8.5)式，便有

$$h_1'' + h_1 = \sin(3z-\sigma)$$

解得

$$h_1 = -\frac{1}{8}\sin(3z-\sigma) \tag{16.8.7}$$

把g_1, f_1和h_1的表达式代入(16.8.4)式，借助于三角恒等式可以得到h_2满足

$$\begin{aligned} &h_2'' + h_2 + 2g_2\cos(z-\sigma) + \frac{3}{8}\cos(3z-\sigma)\sin 2\sigma \\ &+(\frac{1}{4}\sin^2 2\sigma + \frac{1}{8} + f_2)\sin(z-\sigma) \\ &+\frac{1}{8}\cos 2\sigma\sin(3z-\sigma) + \frac{1}{8}\sin(5z-\sigma) = 0 \end{aligned} \tag{16.8.8}$$

根据相同理由，为了消除非周期解，必须要求

$$g_2 = 0, \quad f_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\cos 4\sigma \tag{16.8.9}$$

于是(16.8.8) 式成为

$$h_2'' + h_2 + \frac{3}{8}\sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \frac{1}{8}\cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) + \frac{1}{8}\sin(5z - \sigma) = 0$$

它的特解可写为

$$h_2 = \frac{1}{64}\left\{3\sin 2\sigma \cos(3z - \sigma) + \cos 2\sigma \sin(3z - \sigma) + \frac{1}{3}\sin(5z - \sigma)\right\} \tag{16.8.10}$$

按这样的步骤继续作下去，可以求出高阶量h_3，g_3，f_3；h_4，g_4，f_4；…这里不再重复。将求得的结果代入(16.8.2)式便可得到

$$\begin{aligned} a &= 1 - q\cos 2\sigma + \frac{1}{4}q^2\left(-1 + \frac{1}{2}\cos 4\sigma\right) + \cdots \\ &= 1 - q\cos 2\sigma - \mu^2 + qS_3 \end{aligned} \tag{16.8.11}$$

$$\begin{aligned} \mu &= -\frac{1}{2}q\sin 2\sigma + \frac{3}{128}q^3 \sin 2\sigma - \frac{3}{1024}q^4 \sin 4\sigma + \cdots \\ &= \frac{1}{2}q(-\sin 2\sigma + C_3) \end{aligned} \tag{16.8.12}$$

式中

$$S_3 = -\frac{1}{8}q + \frac{1}{64}q^2 \cos 2\sigma - \frac{1}{512}q^3\left(-\frac{14}{3} + 5\cos 4\sigma\right) + \cdots \tag{16.8.13}$$

$$C_3 = \frac{3}{64}q^2 \sin 2\sigma - \frac{3}{512}q^3 \sin 4\sigma + \cdots \tag{16.8.14}$$

容易看出，a 为 σ 的偶函数，μ 为 σ 的奇函数，由于$e^{\mu z}$和$e^{-\mu z}$ 为互相独立的($\mu \neq 0$)，故能够求出马蒂厄方程的第二独立解

$$y_2 = e^{-\mu z}G(z, -\sigma)$$

当$\mu \neq 0$时，(16.6.1)的一般解可写为

$$y = Ae^{\mu z}G(z, \sigma) + Be^{-\mu z}G(z, -\sigma) \tag{16.8.15}$$

从这个结果可知，当 μ 为虚数时，由于 $G(z\pm\sigma)$ 是周期函数，故对应于这样的解是稳定的。

如果 $\mu^2>0$，则当 $z\to\infty$ 时，(16.8.16)式将发散，这样的解将是不稳定的，故判别马蒂厄方程解是否稳定的判据是 μ^2 的符号，如果 $\mu^2<0$，则解是稳定的，$\mu^2>0$，则解不稳定，$\mu^2=0$ 是稳定区与不稳定区的界面。

从(16.8.11)式和(16.8.12)式，保留到 q^2 项可得

$$a\approx 1-q\cos 2\sigma-\mu^2-\frac{1}{8}q^2$$

$$\mu\approx\frac{1}{2}q[-\sin 2\sigma+O(q^2)]$$

消去 σ 之后可得

$$(1-a)^2-2(1-a)\left(\mu^2+\frac{1}{8}q^2\right)+4\mu^2=q^2$$

显然，上式左端第一项是 q^2 阶的，由于 μ^2 是 q^2 阶的，故第二项是 $O(q^3)$。当 $|q|$ 很小时，它是高阶小，故上式成为

$$(1-a)^2+4\mu^2\approx q^2$$

解得

$$\mu^2=\frac{1}{4}\left[q^2-(1-a)^2\right]\tag{16.8.16}$$

合并(16.8.1)式，(16.8.2)式和(16.8.16)式，并在 $G(z,\sigma)$ 中只取第一项，便可得到(16.5.13)式和(16.5.14)式。现在我们利用(16.8.16)式来判别图 16.10 中的稳定区与非稳定区。为了简明起见，我们取 $|q|$ 很小，并作出 q 很小的放大图(图 16.11)使得(16.8.16)式可以应用。显然，$\mu^2>0$ 时，有

$$|q|>|1-a|\tag{16.8.17}$$

由此可见，在图 16.11 中通过 $a=1$ 的两条直线所夹的阴影区内，等式(16.8.17)成立，其中 $\mu^2>0$，是非稳定区。而

$$|q|=|1-a|\tag{16.8.18}$$

是稳定区与非稳定区的边界。注意，(16.8.18)式的两个边界分别是$a_c^{(1)}$和$a_s^{(1)}$的曲线，故在q不太小时，它们仍是稳定区与不稳定区的界面。上面只是根据(16.8.2)式，$a=1+qf_1(\sigma)+\cdots$的情形，对于$a=m^2+gf_1(\sigma)+\cdots$，$m$=2,3,4,…,其图形是不难作出的，参照(16.6.15)式、(16.6.17)式，并对比(16.8.18)式可知，后者所表示的界面方程恰好是前者的两个等式忽略q^2以上项的结果。由此可见，对于m=2的图形可以由(16.6.20)式和(16.6.22)式忽略$O(q^4)$以上的项求得，在图 16.10 中，这两条曲线$a_c^{(2)}$和$a_s^{(2)}$在a=4处相切。另外，由(16.6.24)式可以作$a_c^{(0)}$的图形，它与q轴相切。关于这些地方的稳定区和非稳定区的确定的方法，可以从相应的μ^2的方程来判别，因计算过程相似，这里不作赘述。

参考文献

[1] Hao B L. Chaos. Singapore: World Scientific, 1984

[2] Rayleigh L. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. Phil Mag, 1916, 32: 529~546

[3] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. J Atmospheric Sciences, 1963, 20: 130~141

[4] Lauterborn W, Cramer E. Subharmonic route to chaos observed in acoustics. Phys RevLett, 1981, 47: 1445~1448

[5] Lauterborn W, Parlitz U. Methods of chaos physics and their application to acoustics. Jour Acoust Soc Am, 1988, 84: 1975~1993

[6] 倪皖荪，魏荣爵．含二次非线性项受迫振动系统中的分岔与混沌现象．物理学报，1985, 34: 503~511

[7] Miao G Q, Tao Q, Ni W, et al. Bifurcation, chaos and hysteresis in electrodynamic cone loudspeaker. WESTPAC III 88, Shanghai, 1988, 885~888

[8] Rossing T D, Fletcher N H. Nonlinear vibrations in plates and gongs. Jour Acoust Soc Am, 1983, 73: 345~351

[9] Feigenbaum M J. Universal behavior in nonlinear systems. Physica D, 1983, 7: 16~39

[10] Edward O. Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems. Rev Mod Phys, 1981, 53: 655~671

[11] Eckmann J P. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. Rev Mod Phys, 1981, 53: 643~654

[12] Manneville P, Pomeau Y. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems. Physica D, 1980, 1: 219~226

[13] Parker T S, Chua L O. Chaos: a tutorial for engineers. Proc IEEE, 1987, 75: 982~1008

[14] Pomeau Y, Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. Commun Math Phys, 1980, 74: 189~197

[15] Ruelle D, Takens F. On the nature of turbulence. Commun Math Phys, 1971, 20: 167~192

[16] Miksis M J, Ting L. Effects of bubbly layers on wave propagation. Jour Acoust Soc Am, 1989,

86: 2349~2358

[17] Wei R J, Wang B R, Mao Y, et al. Further investigation of nonpropagating solitons and their transition to chaos. Jour Acoust Soc Am, 1990, 88: 469~472

[18] Mclachlan N W. The theory and application of mathieu functions. Oxford ; Clarendon Press, 1947

[19] Jeffreys S H. Methods of math phys. London: Cambridge, 1956

第 17 章 固体中的非线性弹性波

在前几章我们详细讨论了流体中的非线性声学，下面将研究介质为固体时的情形。在线性声学中我们早已知道，当介质为流体时，描写介质的弹性常数只有一个(如压缩系数)，而对于各向同性的固体，线性弹性系数却有两个。但在非线性声学中，对流体而言，描写介质的二阶非线性参数也只有一个，即 B/A，而对于固体介质，非线性弹性常数(在二级近似下，称这种非线性弹性常数为三阶弹性常数，有的书中表之为 TOE，是取英文 third-order elasticity 的字头缩写)却不止一个，最少的是各向同性固体，有 3 个独立的三阶弹性常数，对于对称度最高的立方晶系来说，独立的三阶常数有 6 个，而最一般的固体有 56 个 TOE。

下面将可看到，如果将弹性能展成应变的多项式，二次方项前面的系数正好是线性弹性常数，而应变的三次方项前面的系数正是非线性弹性系数，故有的著作中将前者称为二阶弹性常数，后者称为三阶弹性常数。如果讨论的范围延伸到更高阶的项，则会出现四阶弹性常数、五阶弹性常数等，本书只讨论到三阶常数为止，关于更高阶的常数，有兴趣的读者可查阅有关文献①。

研究各阶弹性常数是非常重要的工作，由于它们已经与固体的结构，如晶体的晶格常数紧密联系起来了。众所周知，二阶弹性常数能够从测量声波的速度反映出来，波在传播过程中碰到弹性常数有变化的地方，会产生反射和折射，人们利用这些参数进行无损检测，也就是说，对弹性参数的测量能够提供检测信息。在流体中我们已经知道，除了利用声波速(或者阻抗)作为检测的特征参数以外，近年来还利用非线性参数 B/A 来作为新的特征参数，从而增加了探测信息，于是可以预期，利用三阶弹性常数这组特征参数，将对固体结构，晶格因而对无损检测提供更多更有用的信息，特别对于金属的缺陷和位错检查将会提供一种有力的工具。

17.1 应 变 矩 阵[1~8]

在形变之前介质中有一点，它相对于某个参考系的直角坐标为(a,b,c)(拉格朗日坐标)，它周围的点集合所占有的元体积为 $\mathrm{d}V_a$，但在形变以后，这一点的坐标成为(x,y,z)，而上述元体积 $\mathrm{d}V_a$ 中的那些点的集合这时占有新的元体积 $\mathrm{d}V_a$，显然有

① 参见：Ghate P B. J Appl Phys 1964 (35),337，讨论了三斜晶系的四阶弹性常数。

$$dV_x = dxdydz = |\boldsymbol{J}|dV_a = |\boldsymbol{J}|dadbdc \tag{17.1.1}$$

式中

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{pmatrix} \tag{17.1.2}$$

为雅可比矩阵，$|\boldsymbol{J}|$是它的行列式。如果令形变前后的介质密度分别为ρ_x,ρ_a，由于质量守恒，下述关系成立：

$$\rho_x dV_x = \rho_a dV_a$$

或者

$$\frac{\rho_x}{\rho_a} = \frac{1}{|\boldsymbol{J}|} \tag{17.1.3}$$

显然，上式相当于流体力学中的连续性方程的拉格朗日形式。

下面我们来寻求应变的表达式。设在未形变的介质中有一段弧元，其长度为ds_a，显然有

$$ds_a^2 = da^2 + db^2 + dc^2$$

为了表示简便起见，我们定义下述矩阵符号：

$$[da] = \begin{pmatrix} da \\ db \\ dc \end{pmatrix}, \quad [dx] = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}[da] \tag{17.1.4}$$

后一个式子是很显然的，因为

$$dx = \frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc$$

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial a}\mathrm{d}a + \frac{\partial z}{\partial b}\mathrm{d}b + \frac{\partial z}{\partial c}\mathrm{d}c$$

如果写成矩阵形式，即可得到(17.1.4)式中的第二个式子。根据这个关系我们可以表示弧元

$$\mathrm{d}s_a^2 = [\mathrm{d}a]^*[\mathrm{d}a] \tag{17.1.5}$$

式中，$[\mathrm{d}a]^*$为 $[\mathrm{d}a]$ 的转置矩阵。同理，在形变后弧元的长度平方变为

$$\mathrm{d}s_x^2 = [\mathrm{d}x]^*[\mathrm{d}x] = [\mathrm{d}a]^* \boldsymbol{J}^*\boldsymbol{J}[\mathrm{d}a] \tag{17.1.6}$$

如果在形变前后弧元的长度不变，即

$$\mathrm{d}s_x^2 = \mathrm{d}s_a^2$$

则(17.1.6)式中的$\boldsymbol{J}^*\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{I}$为单位矩阵。但在一般情况下，这个关系并不成立，即$\mathrm{d}s_x \neq \mathrm{d}s_a$，为了描写形变的大小，我们引入一个应变矩阵$\eta$，以使得

$$\boldsymbol{J}^*\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{\eta} \tag{17.1.7}$$

或者

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}^*\boldsymbol{J} - \boldsymbol{I}) \tag{17.1.8}$$

为了说明其几何意义，将(17.1.7)式和(17.1.8)式代入到(17.1.6)式，于是有

$$\mathrm{d}s_x^2 = [\mathrm{d}a]^*(\mathrm{I} + 2\boldsymbol{\eta})[\mathrm{d}a] = \mathrm{d}s_a^2 + [\mathrm{d}a]^* 2\boldsymbol{\eta}[\mathrm{d}a]$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}s_x^2 - \mathrm{d}s_a^2}{\mathrm{d}s_a^2} = 2\left[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s_a}\right]^* \boldsymbol{\eta}\left[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s_a}\right] \tag{17.1.9}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}s_x^2 - \mathrm{d}s_a^2}{\mathrm{d}s_a^2} \approx 2\frac{\mathrm{d}s_x - \mathrm{d}s_a}{\mathrm{d}s_a}$$

代入(17.1.9)式，可得

$$\frac{\mathrm{d}s_x-\mathrm{d}s_a}{\mathrm{d}s_a}\approx\left[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s_a}\right]^{*}\boldsymbol{\eta}\left[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s_a}\right] \tag{17.1.10}$$

显然，式中左端为 $\mathrm{d}s_a$ 的应变，$\left[\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}s_a}\right]$ 为 $\mathrm{d}s_a$ 的方向余弦所构成的 3×1 的矩阵(矢量)，因而 η 是一个 3×3 的应变矩阵，(17.1.8)式是它的定义式。

17.2　运动方程[1~8]

设固体为理想的，即不存在机械的耗散过程，用 $\Phi(\boldsymbol{\eta})$ 表示固体单位体积中的势能，于是拉格朗日密度 L 为

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\rho_0\dot{x}_i^2-\Phi(\boldsymbol{\eta}) \tag{17.2.1}$$

式中 $\Phi(\eta)$ 为固体的弹性能，η 是拉格朗日坐标下的应变矩阵，而拉格朗日方程可用二阶张量形式表示，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a_k}\left[\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial x_i}{\partial a_k})}\right]=0 \tag{17.2.2}$$

式中，$i=1,2,3$，将(17.2.1)式代入(17.2.2)式，可得

$$\rho_0\ddot{x}_i-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a_k}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{jl}}\frac{\partial \eta_{jl}}{\partial\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k}\right)}\right)=0 \tag{17.2.3}$$

式中

$$\eta_{lk}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial x_i}{\partial a_l}\frac{\partial x_i}{\partial a_k}-\delta_{lk}\right\}$$

δ_{lk} 为克隆内克符号，即当两个下标相同时为1，不同时为零。上面的几个式子是表示以二阶张量的形式，如果出现两个相同的指标符号，则对这个指标从1到3求和，η_{lk} 为应变矩阵的 l 行 k 列元素，由于

$$\frac{\partial n_{lk}}{\partial\left(\frac{\partial x_m}{\partial a_n}\right)}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\left(\frac{\partial x_m}{\partial a_n}\right)}\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_l}\frac{\partial x_i}{\partial a_k}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\delta_{ln}\frac{\partial x_m}{\partial a_k}+\delta_{kn}\frac{\partial x_m}{\partial a_l}\right\} \tag{17.2.4}$$

将这个式子代入到(17.2.3)式便有

$$\rho_0\ddot{x}_i=\frac{\mathrm{d}T_{ik}}{\mathrm{d}a_k} \tag{17.2.5}$$

式中

$$T_{ik}=J_{il}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{kl}} \tag{17.2.6}$$

$$J_{il}=\frac{\partial x_i}{\partial a_l} \tag{17.2.7}$$

为矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的第 i 行 l 列元素。在导得(17.2.5)式时，假设了

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{kl}}=\frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{lk}}$$

事实上从 η_{lk} 的表达式可知，$\eta_{lk}=\eta_{kl}$。但应当注意，由于雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 是不对称的，故应力 $T_{ik}\neq T_{ki}$，T_{ik} 称为工程应力张量的分量。方程(17.2.5)是 3 个运动方程。因此，在计算 $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \eta_{kl}}$ 时，如果交换 Φ 中 η_{kl} 下标的次序，则在它所在的这一项中的其他因子的下标次序也要交换。

17.3　各向同性弹性固体的三阶弹性能[1~8]

由于假设固体不存在耗散，故形变了的介质中各种力所做的功都转化为弹性能。一般说这种弹性能不仅与瞬时应变有关，而且与过去的形变(即历史)有关，甚至会出现所谓滞后迴线效应，但本书将不考虑这类效应，只是假设弹性能(或者势能)只与应变有关，即

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\eta}) \tag{17.3.1}$$

现在我们来求 $\Phi(\boldsymbol{\eta})$ 的形式。

作坐标旋转变换 $\boldsymbol{R}$ 使得坐标矢量 $\boldsymbol{a}$ 变成 $\boldsymbol{a}'$，且有 $\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{a}$ 。由(17.1.2)和(17.1.8)两式再根据矩阵变换的性质可知，$\boldsymbol{\eta}$ 变成 $\boldsymbol{\eta}'$，且有 $\boldsymbol{\eta}'=\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{R}$ ，再代入(17.3.1)式可得

$$\Phi(\boldsymbol{\eta}')=\Phi(\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{R})$$

假如在弹性体中旋转一个任意角度之后，其势能不变，即

$$\Phi(\boldsymbol{\eta}')=\Phi(\boldsymbol{R}^*\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{R})=\Phi(\boldsymbol{\eta}) \tag{17.3.2}$$

则将这种弹性体称为各向同性弹性体，我们现在来求出各向同性固体的弹性势能表达式。首先可以看出，势能 Φ 仅是应变矩阵 $\boldsymbol{\eta}$ 的函数，一般说来，$\boldsymbol{\eta}$ 有 9 个元素，即它是 9 个分量的函数。如果应变存在转置对称，那么 $\boldsymbol{\eta}$ 有 6 个独立元素，但是一个矩阵总可以通过一系列的初等变换使得它成为对角化矩阵，从而使得 $\Phi(\boldsymbol{\eta})$ 只是 3 个特定数值 η_1，η_2，η_3 的函数，不妨认为这 3 个值是与矩阵 $\boldsymbol{\eta}$ 相对应的特征方程

$$|\boldsymbol{\eta}-\lambda\boldsymbol{I}|=\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0$$

的 3 个根相对应，这是 $|\boldsymbol{\eta}-\lambda\boldsymbol{I}|$ 是矩阵 $\boldsymbol{\eta}-\lambda\boldsymbol{I}$ 的行列式。而 $\boldsymbol{\eta}-\lambda\boldsymbol{I}$ 的旋转变换 $\boldsymbol{R}^*(\eta-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{R}=\eta'-\lambda\boldsymbol{I}$，而相应的行列式 $|\boldsymbol{\eta}-\lambda\boldsymbol{I}|$ 变成 $|\boldsymbol{\eta}'-\lambda\boldsymbol{I}|$，于是有

$$|\boldsymbol{\eta}'-\lambda\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{R}^*(\boldsymbol{\eta}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{R}|=|\boldsymbol{R}^*||\boldsymbol{\eta}-\lambda\boldsymbol{I}||\boldsymbol{R}|$$

由这个式子可知

$$|\boldsymbol{\eta}'-\lambda\boldsymbol{I}|=\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2'\lambda-I_3'=\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3$$

显然必有

$$I_i'=I_i,\quad i=1,2,3$$

即 I_1,I_2 和 I_3 为旋转不变量，于是有

$$\Phi(\boldsymbol{\eta})\to\Phi(I_1,I_2,I_3) \tag{17.3.3}$$

式中，I_1 等满足特征方程

$$|\boldsymbol{\eta}-\lambda\boldsymbol{I}|=\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3 \tag{17.3.4}$$

将上式中的行列式展开之后，使两边系数相等，便可得到

$$I_1=\eta_{11}+\eta_{22}+\eta_{33} \tag{17.3.5}$$

$$I_2=\begin{vmatrix}\eta_{22} & \eta_{23}\\ \eta_{32} & \eta_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\eta_{33} & \eta_{31}\\ \eta_{13} & \eta_{11}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\eta_{11} & \eta_{12}\\ \eta_{21} & \eta_{22}\end{vmatrix} \tag{17.3.6}$$

$$I_3=\begin{vmatrix}\eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13}\\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23}\\ \eta_{31} & \eta_{32} & \eta_{33}\end{vmatrix} \tag{17.3.7}$$

在矩阵论中，I_1 称为 $\boldsymbol{\eta}$ 的迹，它是对角元素之和，I_2 为应变矩阵对角元素的余子式，I_3 就是 $\boldsymbol{\eta}$ 的行列式。

现在来构造弹性体的势能函数。首先，当应变为无限小时，势能函数必须退化为线性弹性力学的形式。从(17.3.5)式~(17.3.7)式可知，I_1 为 η_{ij} 的一次函数，I_2 是它们的二次函数型，I_3 是三次型，因此当 η_{ij} 为无限小时，I_i 分别为第 i 阶量。从(17.3.3)式可知，位能仅是 I_1,I_2 和 I_3 的函数，故可以将它展成 I_i 的多项式。众所周知，线性弹性力学是将位能展开到应变的二次型函数，本节将它展开到三次型，如果不计常数项，则将 Φ 写成

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\Phi_3 \tag{17.3.8}$$

式中，Φ_i 为应变分量的 i 次型，即 $\Phi_1\sim I_1$ 或者

$$\Phi_2=\alpha I_1 \tag{17.3.9}$$

而 Φ_2 是二次型，因此它可写成 I_1^2 和 I_2 的线性组合，即

$$\Phi_2=\beta I_1^2+\gamma I_2 \tag{17.3.10a}$$

下面将证明

$$\Phi_2=\frac{\lambda+2\mu}{2}I_1^2-2\mu I_2 \tag{17.3.10b}$$

式中，λ,μ 为拉密常数，现在来导出这个结果。

由(17.2.6)式可知，应力矩阵 T 可表示为

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{J}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{\eta}}\right] \tag{17.3.11}$$

式中，$\left[\dfrac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right]$是$\Phi$对$\boldsymbol{\eta}$的梯度矩阵，其运算方法规定如下：将$\Phi$对$\boldsymbol{\eta}$的每个元素$\eta_{ij}$求导时，认为每一个$\eta_{ij}$都彼此独立，也就是说尽管$\eta_{ij}=\eta_{ji}$，但在求导时却视为两个不同的变量，即

$$\frac{\partial \eta_{lk}}{\partial \eta_{ij}}=\delta_{li}\delta_{kj}$$

值得注意的是，如果在Φ中有某个$\eta_{kl}=0$，则Φ对它的导数为零，故在计算具体问题时，应先给出Φ的表达式，然后再求它的各个导数，否则会出差错。这表明 17.2 节中的算法有待完善。按照这样的规定容易算得

$$\left[\frac{\partial I_1}{\partial \eta}\right]=\boldsymbol{I} \tag{17.3.12}$$

$$\left[\frac{\partial I_2}{\partial \eta}\right]=I_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\eta} \tag{17.3.13}$$

和

$$\left[\frac{\partial I_3}{\partial \eta}\right]=\mathrm{co}\boldsymbol{\eta} \tag{17.3.14}$$

上式左端用方括号表示的量为其中相应量的矩阵，这与 17.2 节的符号一致，而 $\mathrm{co}\boldsymbol{\eta}$ 为矩阵$\boldsymbol{\eta}$的余因式矩阵，即它的元素是η_{ij}余因式，例如

$$(\mathrm{co}\boldsymbol{\eta})_{11}=\eta_{22}\eta_{33}-\eta_{23}\eta_{32}$$

余类推。(17.3.12)~(17.3.14)诸结果容易证明，我们只证明(17.3.14)式，其余两式留给读者证明。

根据矩阵的导数定义，有

$$\left[\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right]=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial I_3}{\partial \eta_{11}} & \dfrac{\partial I_3}{\partial \eta_{12}} & \dfrac{\partial I_3}{\partial \eta_{13}}\\ \dfrac{\partial I_3}{\partial \eta_{21}} & \dfrac{\partial I_3}{\partial \eta_{22}} & \dfrac{\partial I_3}{\partial \eta_{23}}\\ \dfrac{\partial I_3}{\partial \eta_{31}} & \dfrac{\partial I_3}{\partial \eta_{32}} & \dfrac{\partial I_3}{\partial \eta_{33}}\end{pmatrix} \tag{17.3.15}$$

但由(17.3.7)式可知，I_3 是 $\boldsymbol{\eta}$ 的行列式，将它代入(17.3.15)式即可得到

$$\left[\frac{\partial I_3}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right]_{ij} = (\mathrm{co}\boldsymbol{\eta})_{ij} \tag{17.3.16}$$

即为(17.3.14)式。

将(17.3.12)式代入(17.3.9)式得到

$$\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right] = \alpha\left[\frac{\partial I_1}{\partial \eta}\right] = \alpha \boldsymbol{I} \tag{17.3.17}$$

如果将 Φ_2 写成 $\Phi_2 = \beta I_1^2 + \gamma I_2$，式中 α, β, γ 待定，于是

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \eta}\right] &= \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial I_1}\right]\left[\frac{\partial I_1}{\partial \eta}\right] + \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial I_2}\right]\left[\frac{\partial I_2}{\partial \eta}\right] \\ &= 2\beta I_1 \boldsymbol{I} + \gamma\left(I_1 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\eta}\right) \\ &= (2\beta + \gamma) I_1 \boldsymbol{I} - \gamma \boldsymbol{\eta}\end{aligned} \tag{17.3.18}$$

将这些结果代入(17.3.11)式，由于 $x = a + u, y = b + v, z = c + w$，这里 u, v 和 w 为 3 个位移分量。若形变为无限小，则线性弹性力学范围要求位能精确到二阶项，即先在(17.3.8)式中忽略 Φ_3 这一项。另外，矩阵 $\boldsymbol{J}$ 可以分解成

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{U}$$

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_a & u_b & u_c \\ v_a & v_b & v_c \\ w_a & w_b & w_c \end{pmatrix}$$

u, v 及 w 为 3 个方向的位移。故应力矩阵可表示为(不计及弹性能的常数项)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{J}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right] = \boldsymbol{J}\left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right] + \boldsymbol{J}\left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \boldsymbol{\eta}}\right] \\ &= \left\{\alpha + (2\beta + \gamma) I_1\right\} \boldsymbol{I} + \left\{\alpha + (2\beta + \gamma) I_1\right\} \boldsymbol{U}\boldsymbol{I} - \gamma \boldsymbol{\eta}\end{aligned} \tag{17.3.19}$$

根据线性弹性力学理论，胡克定律可写为

$$T_{ij} = \lambda I_1 \delta_{ij} + 2\mu \eta_{ij} \tag{17.3.20}$$

对比(17.3.19)式和(17.3.20)式，可知

$$\alpha = 0$$

将这个结果代入到(17.3.19)式，它右端的第二项是非线性项，在线性范围内可以忽略，再根据(17.3.19)式和(17.3.20)式得到

$$\alpha = 0,\ \ 2\beta + \gamma = \lambda,\ \ \gamma = -2\mu \tag{17.3.21}$$

将这些结果代入到Φ_2的表示式中便得到(17.3.10b)式。下面来找出Φ_3的表示式。因为Φ_3应是应变分量的三次型，故它必然是I_1^3, I_1I_2以及I_3的线性组合，即

$$\Phi_3 = gI_1^3 + hI_1I_2 + fI_3$$

默纳汉(Murnaghan)引入 3 个三阶弹性常数l,m和n代替g，h和f，从而将Φ_3写成如下形式，即

$$\Phi_3 = \frac{1}{3}(l+2m)I_1^3 - 2mI_1I_2 + nI_3 \tag{17.3.22}$$

将Φ_i及I_i的表示式代入(17.3.8)式便得到弹性位能Φ与应变分量的关系式：

$$\begin{aligned}\Phi = &\frac{1}{2}(\lambda+2\mu)(\eta_{11}+\eta_{22}+\eta_{33})^2 - 2\mu(\eta_{22}\eta_{33}-\eta_{23}\eta_{32}\\&+\eta_{33}\eta_{11}-\eta_{13}\eta_{31}+\eta_{11}\eta_{22}-\eta_{12}\eta_{21})\\&+\frac{1}{3}(l+2m)(\eta_{11}+\eta_{22}+\eta_{33})^3\\&-2m(\eta_{11}+\eta_{22}+\eta_{33})(\eta_{22}\eta_{33}-\eta_{23}\eta_{32}+\eta_{33}\eta_{11}\\&-\eta_{13}\eta_{31}+\eta_{11}\eta_{22}-\eta_{12}\eta_{21})+n(\eta_{11}\eta_{22}\eta_{33}-\eta_{11}\eta_{23}\eta_{32}\\&-\eta_{21}\eta_{12}\eta_{33}+\eta_{21}\eta_{13}\eta_{32}+\eta_{31}\eta_{12}\eta_{23}-\eta_{31}\eta_{13}\eta_{22})\end{aligned} \tag{17.3.23}$$

所以在这种表象中，各向同性的弹性体有 2 个二阶弹性常数λ,μ和 3 个三阶弹性常数l,m和n，后 3 个常数只包含在Φ_3中，即包含在弹性能应变的三次型表达式中，这就是三阶常数的由来。对于二阶常数定义是统一的，而三阶常数却不统一，我们上面给出的属于默纳汉形式，还有其他各式各样的形式，但大家比较倾向于布鲁格(Brugger)形式，他从热力学方法出发，对各向同性体引入 6 个三阶常数C_{ijk}(仅有 3 个是独立的)但由于历史原因，本书袭用了默纳汉形式，下面给出他们之间的转换关系。

$$
\left.\begin{array}{cc}
\text{布鲁格} & \text{默纳汉} \\
C_{111}=C_{123}+6C_{144}+8C_{456} & 2l+4m \\
C_{112}=C_{123}+2C_{144} & 2l \\
C_{123} & 2l-2m+n \\
C_{144} & m-n/2 \\
C_{155}=C_{144}+2C_{456} & m \\
C_{456} & n/4
\end{array}\right\} \tag{17.3.24}
$$

关于弹性能的热力学定义将在以后略加讨论。

17.4 各向同性弹性固体中的非线性波[1~8]

在线性弹性力学中我们已经知道，各向同性体的一维波动方程可表示为

$$
\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{17.4.1}
$$

式中，C 为波速，对于纵波和横波来说，它们分别为

$$
C=C_l=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}} \tag{17.4.2}
$$

和

$$
C=C_t=\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \tag{17.4.3}
$$

当介质的应变为有限大小时，波动方程不能用(17.4.1)式来描写，而要从(17.2.5)式导出，可以看出，在一般情况下，这组波动方程非常冗长，在这里我们先不作这样的讨论，而是讨论一种简单的情况，即平面波情况，且限制其传播方向为坐标轴 a 的方向，至于更一般情况下的波动方程组，留待以后来推导。

设 3 个位移分量可分别表示为

$$
u=u(a,t),\quad v=v(a,t),\quad w=w(a,t) \tag{17.4.4}
$$

于是可以求出雅可比矩阵

$$
\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix} 1+u_a & 0 & 0 \\ v_a & 1 & 0 \\ w_a & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

应变分量为

$$\eta_{11} = u_a + \frac{1}{2}(u_a^2 + v_a^2 + w_a^2)$$
$$\eta_{12} = \eta_{21} = \frac{1}{2}v_a$$
$$\eta_{13} = \eta_{31} = \frac{1}{2}w_a$$
$$\eta_{23} = \eta_{32} = \eta_{22} = \eta_{33} = 0$$

因而有

$$I_1 = \eta_{11},\ \ I_2 = -(\eta_{12}\eta_{21} + \eta_{13}\eta_{31}),\ \ I_3 = 0$$

$$\Phi = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)\eta_{11}^2 + 2\mu(\eta_{12}\eta_{21} + \eta_{13}\eta_{31}) + \frac{1}{3}(l + 2m)\eta_{11}^3 + 2m\eta_{11}(\eta_{12}\eta_{21} + \eta_{13}\eta_{31})$$

而

$$T_{ik} = J_{il}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta_{kl}} = J_{i1}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta_{k1}} + J_{i2}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta_{k2}} + J_{i3}\frac{\partial\Phi}{\partial\eta_{k3}} \tag{17.4.5}$$

将前面的结果代入T_{ik}的表达式，仅保留到二阶项可得

$$T_{11} = (\lambda + 2\mu)u_a + \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu)u_a^2 + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(v_a^2 + w_a^2) + (l + 2m)u_a^2 + \frac{m}{2}(v_a^2 + w_a^2)$$
$$T_{12} = \mu v_a + \mu u_a v_a + m u_a v_a$$
$$T_{13} = \mu w_a + \mu v_a w_a + m u_a w_a$$
$$T_{21} = \mu v_a + (\lambda + 2\mu)u_a v_a + m u_a v_a$$
$$T_{22} = \mu v_a^2$$
$$T_{23} = \mu v_a w_a$$
$$T_{31} = \mu w_a + (\lambda + 2\mu)u_a w_a + m u_a w_a$$
$$T_{32} = \mu v_a w_a$$
$$T_{33} = \mu w_a^2$$

将这些关系代入(17.2.5)式就可以得到波动方程组：

$$\Box_l^2 u = \left(3 + 2\frac{l+2m}{\lambda+2\mu}\right)\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + \left(1 + \frac{m}{\lambda+2\mu}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}\right) \tag{17.4.6}$$

$$\Box_t^2 v = \frac{\lambda+2\mu+m}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 v}{\partial a^2} + \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}\right) \tag{17.4.7}$$

$$\Box_t^2 w = \frac{\lambda+2\mu+m}{\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 w}{\partial a^2} + \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}\right) \tag{17.4.8}$$

式中，$\Box^2$ 为达朗贝尔算符，即

$$\Box^2 = \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial a^2}$$

当其下标为 l 时，$C = C_l$，下标为 t 时，$C = C_t$。如果形变为无限小时，波动方程组的右端为二阶小量，它们分别退化到纵波和横波的齐次波动方程(17.4.1)。(17.4.6)式~(17.4.8)式表明，一列频率为 ω 的纵波或者横波在无限介质中会产生频率为 2ω 的纵波，但不能产生频率为 2ω 的横波，仅当介质中既有频率为 ω 纵波，又有横波时，才有可能产生频率为 2ω 的横波。

如果介质中只有纵波，于是有

$$u = u(a,t), \quad v = w = 0 \tag{17.4.9}$$

代入(17.4.6)式，得到

$$\Box_l^2 u = \beta\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} \tag{17.4.10}$$

式中

$$\beta = 3 + 2\frac{l+2m}{\lambda+2\mu} \tag{17.4.11}$$

用逐步近似求解，令

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} \tag{17.4.12}$$

设 $u^{(0)} >> u^{(1)}$，将 u 代入到(17.4.10)式，得到

$$\square_l^2 u^{(0)} = 0 \tag{17.4.13}$$

$$\square_l^2 u^{(1)} = \beta\left\{\frac{\partial u^{(0)}}{\partial a}\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial a^2} + \left[\frac{\partial u^{(1)}}{\partial a}\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial a^2} + \frac{\partial u^{(0)}}{\partial a}\frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial a^2}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial a^2}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial a}\right\} \approx \beta\frac{\partial u^{(0)}}{\partial a}\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial a^2} \tag{17.4.14}$$

基波方程(17.4.13)的解为

$$u^{(0)} = A\sin(ka - \omega t) \tag{17.4.15}$$

将它代入到(17.4.14)式的右端，便得到一个非齐次波动方程，应用变动参数法求解它，容易得到

$$u^{(1)}(a,t) = -\frac{\beta(kA)^2}{8}a\cos 2(ka - \omega t) \tag{17.4.16}$$

最后两个式子相加，即得到(17.4.10)式的逐步近似解，值得注意的是$u^{(1)} \sim a$，它表明沿传播方向上有积累效应，对比在流体中冲击波形成的概念，将(17.4.10)式与流体中的波方程

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{C_0^2}{\left[1+\xi_a\right]^{\gamma+1}}\xi_{aa}$$

对比，可以求得在各向同性的固体中冲击波形成距离

$$X_p = \frac{-2C_l^2}{\beta\omega\dot{u}_0} \tag{17.4.17}$$

式中，$\dot{u}_0 = \dfrac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}t}$为沿 a 方向的质点速度振幅，C_l为纵波波速，β为负值，故(17.4.17)式有负号。上面我们讨论的是纵波的非线性相互作用产生的倍频纵波，下面我们来研究横波产生倍频纵波，即设

$$v = v(a,t), \quad u = w = 0 \tag{17.4.18}$$

将它代入(17.4.6)式，得到

$$\frac{1}{C_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = \beta_1\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial^2 v}{\partial a^2} \tag{17.4.19}$$

式中

$$\beta_1 = 1 + \frac{m}{\lambda + 2\mu} \tag{17.4.20}$$

而(17.4.7)式成为

$$\frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial a^2} = 0 \tag{17.4.21}$$

首先求解(17.4.21)式，设在 $a=0$ 处，质点的位移分别为

$$u = w = 0, \quad v(0,t) = A[1-\cos\omega t]$$

则(17.4.21)式的解可表示为

$$v(a,t) = A\left\{1-\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{C_t}a\right)\right\} \tag{17.4.22}$$

将这个式子代入到(17.4.19)式的右端，则方程成为

$$\frac{1}{C_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial a^2} = -\frac{\beta_1 \omega^3 A^2}{2C_t^3}\sin^2\left[\omega t - \frac{\omega}{C_t}a\right] \tag{17.4.23}$$

这个非齐次方程的特解为

$$u^{(p)}(a,t) = -\frac{\beta_1 \omega A^2}{8C_t(1-C_t^2/C_l^2)}\sin 2\left(\omega t - \frac{\omega}{C_t}a\right) \tag{17.4.24}$$

而(17.4.23)式的齐次解可表示为

$$\begin{aligned} u^{(H)} = & K_1 \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{C_l}a\right) + K_2 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{C_l}a\right) \\ & + K_3 \sin 2\left(\omega t - \frac{\omega}{C_l}a\right) + K_4 \cos 2\left(\omega t - \frac{\omega}{C_l}a\right) \end{aligned} \tag{17.4.25}$$

显然，全部解为 $u = u^{(p)} + u^{(H)}$，根据条件

$$u(0,t) = 0$$

于是有

$$K_1 = K_2 = K_4 = 0,\quad K_3 = \frac{\beta_1 \omega A^2}{8C_t(1 - C_t^2 / C_l^2)}$$

故有

$$\begin{aligned} u(a,t) = & \frac{\beta_1 \omega A^2}{4C_t(1 - C_t^2 / C_l^2)} \sin\left[\omega a\left(\frac{1}{C_t} - \frac{1}{C_l}\right)\right] \\ & \times \cos\left[2\omega t - \omega a\left(\frac{1}{C_t} + \frac{1}{C_l}\right)\right] \end{aligned} \tag{17.4.26}$$

从这些结果可知，如果测得两个波速，可以得到 λ 和 μ ;再通过对二阶谐波的测量，可以进一步测出两个三阶弹性常数，如 l 和 m ,但第三个常数 n 尚不能测得，因此寻求其他方法来测量三阶常数是非常必要的。

17.5　附加静压力或者常应力的各向同性弹性体中波的传播[2,4,6]

从 17.4 的结果看出，仅由单方向(一维)的纵波或者横波来激励纵波二阶谐波的方法，还不能测出 3 个三阶弹性常数的全部，因为在(17.4.16)式及(17.4.26)式中，只包含 l 和 m 两个三阶常数，靠这两个式子是测不出 n 来的，为了测量全部三阶常数，休斯(Hughes)和凯利(Kelly)[6]从理论上研究了几个有用的实际情况，其理论的实质是用有限形变的弹性理论方法来研究各向同性固体中的波速与附加静压力或单向常应力的关系，从而用来测量固体的三阶常数，在理论的推导中应用了下述近似：附加静压力或单向常应力所产生的体积相对变化值是小量，所谓静压力是指在固体各个方向上都承受了这个力，它区别于单方向上的常应力，后者是作用在一个方向上。

在处理这个命题之前，不妨回忆一下前面几节的讨论。在以前我们讨论的运动是一个坐标变量的函数，即一维问题，在这样的假设下，尽管所得到的方程式很简单，但同时也丧失了很多有用的东西，最典型的是不能求出三阶常数的全部。另外，由于坐标变量只有一个，就不能用这些方程组来处理一般情况下的边值问题(例如斜入射情况下的反射，折射问题)，由于这些缘故，我们将在下面导出三维波动方程组。

这里自变量坐标仍选拉格朗日变量 a, b, c, 质点位移仍用 u, v, w 表示，根据力学定律，方程(17.2.5)可以写成

$$\left.\begin{aligned}
\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_{11}}{\partial a} + \frac{\partial T_{12}}{\partial b} + \frac{\partial T_{13}}{\partial c} \\
\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_{21}}{\partial a} + \frac{\partial T_{22}}{\partial b} + \frac{\partial T_{23}}{\partial c} \\
\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_{31}}{\partial a} + \frac{\partial T_{32}}{\partial b} + \frac{\partial T_{33}}{\partial c}
\end{aligned}\right\} \tag{17.5.1}$$

式中，T_{ij} 为应力，它们由(17.2.6)式决定，即

$$\left.\begin{aligned}
T_{11} &= J_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{11}} + J_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{21}} + J_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{31}} \\
T_{12} &= J_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{12}} + J_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{22}} + J_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{32}} \\
T_{13} &= J_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{13}} + J_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{23}} + J_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{33}} \\
T_{21} &= J_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{11}} + J_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{21}} + J_{23} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{31}} \\
T_{22} &= J_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{12}} + J_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{22}} + J_{23} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{32}} \\
T_{23} &= J_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{13}} + J_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{23}} + J_{23} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{33}} \\
T_{31} &= J_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{11}} + J_{32} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{21}} + J_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{31}} \\
T_{32} &= J_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{12}} + J_{32} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{22}} + J_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{32}} \\
T_{33} &= J_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{13}} + J_{32} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{23}} + J_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_{33}}
\end{aligned}\right\} \tag{17.5.2}$$

式中，J_{ij} 为雅可比矩阵的元素，其定义式为(17.1.2)式，η_{ij} 为应变矩阵元素，由(17.1.8)式给定，Φ 为弹性位能，对各向同性固体而言，它可用(17.3.23)式表示，由于 $x = a + u$，$y = b + v$，$z = c + w$，由(17.1.2)式可以求出 J_{ij}，例如

$$\left.\begin{aligned}
J_{11} &= \frac{\partial x}{\partial a} = 1 + \frac{\partial u}{\partial a},\ J_{12} = \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial u}{\partial b},\ J_{13} = \frac{\partial x}{\partial c} = \frac{\partial u}{\partial c} \\
J_{21} &= \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial v}{\partial a},\ J_{22} = \frac{\partial y}{\partial b} = 1 + \frac{\partial v}{\partial b},\ J_{23} = \frac{\partial y}{\partial c} = \frac{\partial v}{\partial c} \\
J_{31} &= \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial w}{\partial a},\ J_{32} = \frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial w}{\partial b},\ J_{33} = \frac{\partial z}{\partial c} = 1 + \frac{\partial w}{\partial c}
\end{aligned}\right\} \tag{17.5.3}$$

为表示简便起见，下面将 u_a 表示 $\dfrac{\partial u}{\partial a}$，依次类推。由(17.1.8)式，可以求出应变分量的具体表达式并列之如下：

$$\left.\begin{aligned}
\eta_{11} &= u_a + \frac{1}{2}\left(u_a^2 + v_a^2 + w_a^2\right)\\
\eta_{22} &= v_b + \frac{1}{2}\left(u_b^2 + v_b^2 + w_b^2\right)\\
\eta_{33} &= w_c + \frac{1}{2}\left(u_c^2 + v_c^2 + w_c^2\right)\\
\eta_{23} = \eta_{32} &= \frac{1}{2}\left[u_b u_c + v_c(1+v_b) + w_b(1+w_c)\right]\\
\eta_{31} = \eta_{13} &= \frac{1}{2}\left[v_c v_a + w_a(1+w_c) + u_c(1+u_a)\right]\\
\eta_{12} = \eta_{21} &= \frac{1}{2}\left[w_a w_b + u_b(1+u_a) + v_a(1+v_b)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{17.5.4}$$

将弹性位能表达式(17.3.23)代入(17.5.2)式(假设所有 η_{ij} 皆不为零)，应用(17.5.3)式和(17.5.4)式，再将结果代入(17.5.1)式，最终求出 3 个位移分量所满足的波方程组：

$$\begin{aligned}
\rho_0\ddot{u} = {} & (\lambda+2\mu)\left\{\frac{\partial}{\partial a}[\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v})^2 + u_a\nabla\cdot\boldsymbol{v}]\right.\\
& \left. + \frac{\partial}{\partial b}(u_b\nabla\cdot\boldsymbol{v}) + \frac{\partial}{\partial c}(u_c\nabla\cdot\boldsymbol{v})\right\}\\
& + \mu\left\{\frac{\partial}{\partial a}\left[-2(v_b+w_c) - \left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial b}\right)^2 - \left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial c}\right)^2\right.\right.\\
& \left. + u_b^2 + u_c^2 + u_b v_a + u_c w_a - 2u_a(v_b+w_c)\right]\\
& + \frac{\partial}{\partial b}\left[u_b + v_a + v_a v_b + w_a w_b + u_c v_c + u_a v_a + u_c w_b - 2u_b w_c\right]\\
& \left. + \frac{\partial}{\partial c}\left[w_a + u_c + w_a w_c + v_a v_c + u_a w_a + u_b w_b + u_b v_c - 2u_c v_b\right]\right\}\\
& + (l+2m)\frac{\partial}{\partial a}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2\\
& + m\left\{\frac{\partial}{\partial a}\left[-2(v_b+w_c)\nabla\cdot\boldsymbol{v} - 2H\right]\right.\\
& + \frac{\partial}{\partial b}[(u_b+v_a)\nabla\cdot\boldsymbol{v}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\partial}{\partial c}\left[(w_a+u_c)\nabla\cdot v\right]\Big\} \\
&+\frac{n}{4}\left\{\frac{\partial}{\partial a}\left[4w_c v_b-(v_c+w_b)^2\right]\right. \\
&+\frac{\partial}{\partial b}\left[(w_a+u_c)(v_c+w_b)-2w_c(u_b+v_a)\right] \\
&\left.+\frac{\partial}{\partial c}\left[(v_a+u_b)(w_b+v_c)-2v_b(w_a+u_c)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{17.5.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_0\ddot{v}=&(\lambda+2\mu)\{\frac{\partial}{\partial b}[\nabla\cdot v+\frac{1}{2}(\nabla v)^2+v_b\nabla\cdot v] \\
&+\frac{\partial}{\partial c}(v_c\nabla\cdot v)+\frac{\partial}{\partial a}(v_a\nabla\cdot v)\Big\} \\
&+\mu\left\{\frac{\partial}{\partial b}\left[-2(w_c+u_a)-\left(\frac{\partial v}{\partial c}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2\right.\right. \\
&\left.+v_c^2+v_a^2+v_c w_b+v_a u_b-2v_b(w_c+u_a)\right] \\
&+\frac{\partial}{\partial c}\left[v_c+w_b+w_b w_c+u_b u_c+v_a w_a+v_b w_b+v_a u_c-2v_c u_a\right] \\
&\left.+\frac{\partial}{\partial a}\left[u_b+v_a+u_b u_a+w_b w_a+v_b u_b+v_c u_c+v_c w_a-2v_a w_c\right]\right\} \\
&+(1+2m)\frac{\partial}{\partial b}(\nabla\cdot v)^2 \\
&+m\left\{\frac{\partial}{\partial b}[-2(w_c+u_a)\nabla\cdot v-2H]+\frac{\partial}{\partial c}[(v_c+w_b)\nabla\cdot v]\right. \\
&\left.+\frac{\partial}{\partial a}\left[(u_b+v_a)\nabla\cdot v\right]\right\} \\
&+\frac{n}{4}\left\{\frac{\partial}{\partial b}\left[4u_a w_c-(w_a+u_c)^2\right]\right. \\
&+\frac{\partial}{\partial c}\left[(u_b+v_a)(w_a+u_c)-2u_a(v_c+w_b)\right] \\
&\left.+\frac{\partial}{\partial a}\left[(w_b+v_c)(u_c+w_a)-2w_c(u_b+v_a)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{17.5.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_0 \ddot{w} = &(\lambda+2\mu)\left\{\frac{\partial}{\partial c}[\nabla\bullet\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v})^2+w_c\nabla\bullet\boldsymbol{v}]\right.\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial a}(w_a\nabla\bullet\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial b}(w_b\nabla\bullet\boldsymbol{v})\right\}\\
&+\mu\left\{\frac{\partial}{\partial c}[-2(u_a+v_b)-\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial a}\right)^2-\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial b}\right)^2\right.\\
&+w_a^2+w_b^2+w_a u_c+w_b v_c-2w_c(u_a+v_b)]\\
&+\frac{\partial}{\partial a}[w_a+u_c+u_c u_a+v_c v_a+w_b u_b+w_c u_c+w_b v_a-2w_a v_b]\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial b}[v_c+w_b+v_c v_b+u_c u_b+w_c v_c+w_a v_a+w_a u_b-2w_b u_a]\right\}\\
&+(l+2m)\frac{\partial}{\partial c}(\nabla\bullet\boldsymbol{v})^2\\
&+m\{\frac{\partial}{\partial c}[-2(u_a+v_b)\nabla\bullet\boldsymbol{v}-2H]\\
&+\frac{\partial}{\partial a}[(w_a+u_c)\nabla\bullet\boldsymbol{v}]\\
&+\frac{\partial}{\partial b}[(v_c+w_b)\nabla\bullet\boldsymbol{v}]\}\\
&+\frac{n}{4}\left\{\frac{\partial}{\partial c}[4v_b u_a-(u_b+v_a)^2]\right.\\
&+\frac{\partial}{\partial a}[(v_c+w_b)(u_b+v_a)-2v_b(w_a+u_c)]\\
&\left.+\frac{\partial}{\partial b}[(u_c+w_a)(v_a+u_b)-2u_a(v_c+w_b)]\right\}
\end{aligned}
\tag{17.5.7}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
H = &u_a w_c + v_b w_c + u_a v_b\\
&-\frac{1}{4}\left[(w_a+u_c)^2+(u_b+v_a)^2+(v_c+w_b)^2\right]
\end{aligned}
\tag{17.5.8}
$$

上述 3 个波方程其实可以按顺序递推出来，即按下述图示推演：

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc}
\cdots u_a & \to & v_b & \to & w_c\cdots & & u_b & \to & v_c & \to & w_a & \cdots & u_c & \to & v_a & \to & w_b\cdots & & & & & & \\
\| & & \| & & \| & & /\!/ & & /\!/ & & /\!/ & & /\!/ & & /\!/ & & /\!/ & & & & & & \\
\cdots a & \to & b & \to & c & \to & a & \to & b & \to & c & \to & a & \to & b & \to & c & \to & a & \to & b & \to & c\cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & & & & \\
\cdots u & \to & v & \to & w & \to & u & \to & v & \to & w & \to & u & \to & v & \to & w & \to & u & \to & v & \to & w\cdots
\end{array}
\tag{17.5.9}
$$

其中除了非递推量 H, $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ 和 $\nabla \boldsymbol{v}$ 以外, 其他量均要递推, 如(17.5.5)式第一行的第一个递推量为 u_a, 到(17.5.6)式和(17.5.7)式中的第一个递推量分别为 v_b 和 w_c, 类似地有 $u_b \to v_c \to w_a$; $u_c \to v_a \to w_b$ 等。这里 $\nabla \boldsymbol{v}$ 是一个符号, 其定义为

$$(\nabla \boldsymbol{v})^2 = \left[\boldsymbol{i}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial a} + \boldsymbol{j}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial b} + \boldsymbol{k}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial c}\right]^2 = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial c}\right)^2 \tag{17.5.10}$$

在格林(Green)的书中[4], 相应于本书(17.5.8)式中有印刷错误(相应于(17.5.5)式方括号中最后一个平方项中的 v_c, 它对应于式(17.5.5)中的 $2H$ 项对 a 微分一次之后就成为 v_{ac}, 而格林的书中的(240)式误印为 v_{cc}, 尽管这是排印错误, 但对于这样麻烦的式子, 人们几乎没有勇气去进行检查和验算。有了这些准备工作之后, 我们可以介绍休斯和凯利的工作)。

在下面几种情况下, 波传播都是沿着 a 的方向。

1. 静压力负载情况下的纵波传播

设在固体上加了个静压力 P, 它在固体中产生法应力而不产生切应力, 即

$$T_{ii} = -P, \quad T_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

假设它产生的位移分量分别与相应的拉格朗日坐标成正比, 即

$$u = \alpha a, \quad v = \alpha b, \quad w = \alpha c$$

利用应力方程(17.2.6)可得

$$-P = (\lambda + 2u)a + \lambda 2\alpha$$

或者

$$\alpha = -\frac{P}{3\lambda + 2u} \tag{17.5.11}$$

容易证明, 3α 是静压力作用下引起的位移的散度, 即体积的相对变化, 根据熟知的体积压缩模量 $\lambda + \frac{2}{3}u$ 的定义, (17.5.11)式正是胡克定律的表示式。

如果固体加了静压负载之后还有纵波传播, 则 3 个位移分量成为

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha a + A\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\varpi t - (1+\alpha)k_l a]} \\ v &= \alpha b \\ w &= \alpha c \end{aligned}\right\} \tag{17.5.12}$$

式中，k_l为纵波波数。考虑到这个式子，(17.5.5)式~(17.5.8)式只剩下第一个方程，即

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu)u_{aa} + [3(\lambda + 2u) + 2(l + 2m)]u_a u_{aa} + (\lambda + 2l)(v_b u_{aa} + w_c u_{aa}) \tag{17.5.13}$$

其他关于v, w的方程消失。将(17.5.12)式代入(17.5.13)式，只取到α的线性项，即认为静压力所产生的相对体积变化为一阶小量，从而忽略其平方项和更高阶项，定义频率为ω的纵波速为

$$C_{lp} = \frac{\omega}{k_l} \tag{17.5.14}$$

最终可得

$$C_{lp}^2 = C_l^2 - \frac{P}{\rho_0(3\lambda + 2u)}(7\lambda + 10\mu + 6l + 4m) \tag{17.5.15}$$

式中C_l为$P = 0$时的纵波波速，它由(17.4.2)式给定。在本节中，用下述符号来表示加了负载之后的声速C_{uv}它的第一个下标u表示传播的波的性质，如果是$u=l$，则传播的波是纵波，如果是$u=t$，则是横波。第二个下标v表示预加负载力的情况：如果施加的是各向同性的静压力，则用下标 $v=p$ 表示，如果施加的是单方向的压应力，则所沿的方向v分别用a,b,c作为下标来阐明。根据(17.5.15)式，如果改变P测出相应的C_{lp}，那么$C_{lp} - P$图上直线的斜率中包含了部分二阶和三阶弹性常数的信息。

2. 在小振幅波传播的方向上加一个单向压力 a 方向传播纵波的情形

在小振幅波传播的方向上加一个单向压力，则应力使

$$T_{11} = -T,\ T_{22} = T_{33} = T_{23} = T_{31} = T_{12} = 0$$

它引起的位移为

$$u = \alpha a,\ v = \alpha_1 b,\ w = \alpha_1 c$$

上式表明，a方向受压使得b, c方向上伸长，这是由泊松效应引起的，由此可得

$$\alpha = -\frac{\lambda + u}{\mu(3\lambda + 2\mu)}T \tag{17.5.16}$$

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}T \tag{17.5.17}$$

在a方向上除了有上述的压力作用以外,还同时有纵波传播，于是 3 个位移分量成为

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha a + A\mathrm{e}^{\mathrm{j}[wt-(1+\alpha)k_l a]} \\ v &= \alpha_1 b \\ w &= \alpha_1 c \end{aligned}\right\} \tag{17.5.18}$$

类似于前面的近似,只取α，α_1的一阶项,容易得到压应力作用下的波速

$$C_{la}^2 = C_l^2 - \frac{T}{\rho_0(3\lambda+2\mu)} \cdot \left[\frac{\lambda+\mu}{\mu}(4\lambda+10\mu+4m)+\lambda+2l\right] \tag{17.5.19}$$

3. 静压力负载下横波传播

静压力负载下横波传播满足

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha a \\ v &= \alpha b + A\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t-(1+\alpha)k_t a]} \\ w &= \alpha c \end{aligned}\right\} \tag{17.5.20}$$

根据类似的方法求出

$$\alpha = \frac{-p}{(3\lambda+2\mu)}$$

式中，$k_t = \omega / C_t$, C_t为负载为零时的横波波速。将这结结果代入波方程组，仍取到α的一次项，容易得到相应于压力负载下的波速

$$C_{tp}^2 = C_t^2 - \frac{P}{\rho_0(3\lambda+2\mu)}\left(3\lambda+6\mu+3m-\frac{1}{2}n\right) \tag{17.5.21}$$

4. b 方向上加压应力沿 a 方向传播纵波

b方向上加压应力沿a方向传播纵波满足

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_1 a + A\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\varpi t-(1+\alpha_1)k_t a]} \\ v &= \alpha b \\ w &= \alpha_1 c \end{aligned}\right\} \tag{17.5.22}$$

最终得到波速

$$C_{lb}^2 = C_l^2 - \frac{T}{\rho_0(3\lambda+2\mu)}\left[2l - \frac{2\lambda}{\mu}(m+\lambda+2\mu)\right] \tag{17.5.23}$$

5. b 方向上加压力 a 方向上传播横波

b 方向上加压力沿 a 方向上传的横波满足

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_1 a \\ v &= \alpha b + A\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\varpi t-(1+a_1)k_t a\ ]} \\ w &= \alpha_1 c \end{aligned}\right\} \tag{17.5.24}$$

相应的波速为

$$C_{tb}^2 = C_t^2 - \frac{T}{\rho_0(3\lambda+2\mu)}\left[m + \frac{\lambda n}{4\mu} + \lambda + 2\mu\right] \tag{17.5.25}$$

6. c 方向上加压力 a 方向传播横波

c 方向上加压力 a 方向传播横波满足

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha_1 a \\ v &= \alpha_1 b \\ w &= \alpha c + A\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega t-(1+\alpha_1)k_t a]} \end{aligned}\right\} \tag{17.5.26}$$

波速为

$$C_{tc}^2 = C_t^2 - \frac{T}{\rho_0(3\lambda+2\mu)}\left[m - \frac{\lambda+\mu}{2\mu}n - 2\lambda\right] \tag{17.5.27}$$

7. a 方向上加压力 a 方向传播横波

a 方向上加压力沿 a 方向传播横波满足

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha a \\ v &= a_1 b + A\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\alpha x-(1+\alpha)k_t a]} \\ w &= a_1 c \end{aligned}\right\} \tag{17.5.28}$$

相应的波速为

$$C_{ta}^2 = C_t^2 - \frac{T}{\rho_0(3\lambda+2\mu)}\left[m + \frac{\lambda n}{4\mu} + 4\lambda + 4\mu\right] \tag{17.5.29}$$

利用加静负载的方法，休斯(Hughes)和凯利(Kelly)共设计了上述 9 种情况，用来测量 5 个弹性常数，多余的方程作为检验用，根据这 9 种情况测得的弹性常数的数据参看他们的文章。

以上我们介绍了弹性能的默纳汉表象。在这一表象中，各向同性弹性介质中的 3 个三阶常数为 l,m,n。在推导其表达式时，曾借助于不变量的概念，而物理学家更习惯于从物理上来讨论。到目前为止，人们倾向于布鲁格的热力学定义的弹性能，为此，下面将扼要地加以介绍。

根据热力学定律，将内能 U 写成熵 S 及应变 η_{ik} 的函数，将自由能 F 写成温度 T 与应变的函数。定义 n 阶绝热劲度系数

$$C_{jkpq\cdots}^{s} = \rho_0\left(\frac{\partial^n U}{\partial\eta_{jk}\partial\eta_{pq}\cdots}\right)_s \tag{17.5.30}$$

以及 n 阶等温劲度系数

$$C_{jkpq\cdots}^{T} = \rho_0\left(\frac{\partial^n U}{\partial\eta_{jk}\partial\eta_{pq}\cdots}\right)_T \tag{17.5.31}$$

应用沃伊特(Voigt)符号来简化下标，即令

$$11\to1,\ 22\to2,\ 33\to3,\ 23\to4,\ 13\to5,\ 12\to6$$

于是内能的展开式可表示为

$$\rho_0 U(\eta) = \rho_0 U(\eta,S) - \rho_0 U(0,S)$$

$$=\frac{1}{2}C_{ij}^{s}\eta_i\eta_j+\frac{1}{6}C_{ijk}^{s}\eta_i\eta_j\eta_k+\cdots \tag{17.5.32}$$

式中，η 为全部应变 η_i 的简写。(17.5.32)式还可写成更明确的形式，即

$$\rho_0 U(\eta)=\frac{1}{2}\sum_j C_{jj}^{s}\eta_j^2+\sum_{j<k}C_{jk}^{s}\eta_j\eta_k+\frac{1}{6}\sum_j C_{jjj}^{s}\eta_j^3$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j\neq k}C_{jjk}^{s}\eta_j^2\eta_k+\sum_{j\neq k\neq m}C_{jkm}^{s}\eta_j\eta_k\eta_m+\cdots \tag{17.5.33}$$

对于理想弹性介质，应力做功完全转化为弹性能，这时，$\rho_0 U(\eta)$ 即为前面讨论过的 $\Phi(\eta)$，而本节的三阶弹性常数与默纳汉的三阶常数之间的关系见(17.3.24)式。

17.6　固体中有限振幅波的二阶势方程[9]

在线性弹性波理论中，人们曾引入了矢量势和标量势来表示固体中的位移，结果表明，这两个势都满足齐次波动方程，在此之前，当然地要求这些势函数满足一定的条件，通常称之为规范条件。但当固体中的波是有限振幅的情况下，势函数满足什么方程？这是本节要回答的问题。

在前几节中，讨论的弹性波只是在单方向(或者单一变量)传播的纯模式(纵波或者横波)振动，这种理论不能用来处理有界空间斜向传播的波动问题，故在三维空间引入势函数来描述波传播问题是很必要的。与以往的传统一样，本节只准确到二级近似，即精确到二阶的势函数。

由(17.5.1)式可知

$$\rho_0\begin{pmatrix}\ddot{u}\\ \ddot{v}\\ \ddot{w}\end{pmatrix}=\left(\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial c}\right)\begin{pmatrix}T_{11} & T_{21} & T_{31}\\ T_{12} & T_{22} & T_{32}\\ T_{13} & T_{23} & Y_{33}\end{pmatrix} \tag{17.6.1}$$

将应力张量的分量 T_{ij} 用线性成分 $T_{ij}^{(1)}$ 以及非线性成分 $T_{ij}^{(2)}$ 之和表示，即

$$T_{ij}=T_{ij}^{(1)}+T_{ij}^{(2)} \tag{17.6.2}$$

在默纳汉表象中，有

$$\left.\begin{aligned}
T_{11}^{(1)} &= \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{v} + 2\mu u_a \\
T_{12}^{(1)} &= \mu(u_b + v_a) \\
T_{13}^{(1)} &= \mu(w_a + u_c) \\
T_{21}^{(1)} &= \mu(u_b + v_a) \\
T_{22}^{(1)} &= \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{v} + 2\mu v_b \\
T_{23}^{(1)} &= \mu(v_c + w_b) \\
T_{31}^{(1)} &= \mu(w_a + u_c) \\
T_{32}^{(1)} &= \mu(v_c + w_b) \\
T_{33}^{(1)} &= \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{v} + 2\mu w_c
\end{aligned}\right\} \tag{17.6.3}$$

$$\left.\begin{aligned}
T_{11}^{(2)} = {} & (\lambda + 2\mu)\left[\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v})^2 + u_a\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right] \\
& + \mu\left[-\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial b}\right)^2 - \left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial c}\right)^2 + u_b^2 + u_c^2 + u_b v_a \right. \\
& \left. + u_c w_a - 2u_a(v_b + w_c)\right] + (l + 2m)(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2 \\
& - 2m[(v_b + w_c)\nabla\cdot\boldsymbol{v} + H] \\
& + \frac{n}{4}[4w_c v_b - (v_c + w_b)^2] \\
T_{12}^{(2)} = {} & (\lambda + 2\mu)u_b\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \mu[v_a v_b + w_a w_b + u_c v_c \\
& + u_a v_a + u_c w_b - 2u_b w_c] + m(u_b + v_a)\nabla\cdot\boldsymbol{v} \\
& + \frac{n}{4}[(w_a + u_c)(v_c + w_b) - 2w_c(u_b + v_a)] \\
T_{13}^{(2)} = {} & (\lambda + 2\mu)u_c\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \mu[w_a w_c + v_a v_c + u_a w_a \\
& + u_b w_b + u_b v_c - 2u_c v_b] + m(w_a + u_c)\nabla\cdot\boldsymbol{v} \\
& + \frac{n}{4}[(v_a + u_b)(w_b + v_c) - 2v_b(w_a + u_c)] \\
T_{21}^{(2)} = {} & (\lambda + 2\mu)v_a\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \mu[u_b u_a + w_b w_a + v_b u_b \\
& + v_c u_c + v_c w_a - 2v_a w_c] + m(u_b + v_a)\nabla\cdot\boldsymbol{v} \\
& + \frac{n}{4}[(w_b + v_c)(u_c + w_a) - 2w_c(u_b + v_a)]
\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.\begin{aligned}
T_{22}^{(2)} &= (\lambda+2\mu)\left[\frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v})^2 + v_b \nabla\cdot\boldsymbol{v}\right] \\
&\quad + \mu\left[-\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial c}\right)^2 - \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial a}\right)^2 + v_c^2 + v_a^2 + v_c w_b \right.\\
&\quad \left. + v_a u_b - 2v_b(w_c + u_a)\right] + (l+2m)(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2 \\
&\quad - 2m[(w_c + u_a)\nabla\cdot\boldsymbol{v} + H] \\
&\quad + \frac{n}{4}[4u_a w_c - (w_a + u_c)^2] \\
T_{23}^{(2)} &= (\lambda+2\mu)v_c \nabla\cdot\boldsymbol{v} + \mu[w_b w_c + u_b u_c + v_a w_a \\
&\quad + v_b w_b + v_a u_c - 2v_c u_a] + m(v_c + w_b)\nabla\cdot\boldsymbol{v} \\
&\quad + \frac{n}{4}[(u_b + v_a)(w_a + u_c) - 2u_a(v_c + w_b)] \\
T_{31}^{(2)} &= (\lambda+2\mu)w_a \nabla\cdot\boldsymbol{v} + \mu[u_c u_a + v_c v_a + w_b u_b \\
&\quad + w_c u_c + w_b v_a - 2w_a v_b] + m(w_a + u_c)\nabla\cdot\boldsymbol{v} \\
&\quad + \frac{n}{4}[(v_c + w_b)(u_b + v_a) - 2v_b(w_a + u_c)] \\
T_{32}^{(2)} &= (\lambda+2\mu)w_b \nabla\cdot\boldsymbol{v} + \mu[v_c v_b + u_c u_b + w_c v_c \\
&\quad + w_a v_a + w_a u_b - 2w_b u_a] + m(v_c + w_b)\nabla\cdot\boldsymbol{v} \\
&\quad + \frac{n}{4}[(u_c + w_a)(v_a + u_b) - 2u_a(v_c + w_b)] \\
T_{33}^{(2)} &= (\lambda+2\mu)\left[\frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v})^2 + w_c \nabla\cdot\boldsymbol{v}\right] \\
&\quad + \mu\left[-\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial a}\right)^2 - \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial b}\right)^2 \right.\\
&\quad \left. + w_a^2 + w_b^2 + w_a u_c + w_b v_c - 2w_c(u_a + v_b)\right] \\
&\quad + (l+2m)(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2 \\
&\quad + 2m[-(u_a + v_b)\nabla\cdot\boldsymbol{v} - H] \\
&\quad + \frac{n}{4}[4v_b u_a - (u_b + v_a)^2]
\end{aligned}\right\} \tag{17.6.4}
$$

式中

$$H = u_a w_c + v_b w_c + u_a v_b - \frac{1}{4}[(w_a + u_c)^2 + (u_b + v_a)^2 + (v_c + w_b)^2] \tag{17.6.5}$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{i}u + \boldsymbol{j}v + \boldsymbol{k}w \\ \nabla &= \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial a} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial b} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial c} \\ (\nabla \boldsymbol{v})^2 &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial c}\right)^2 \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{v}) &= u_a + v_b + w_c \end{aligned}\right\} \tag{17.6.6}$$

式中，$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$为沿$a,b,c$方向上的单位向量，$u_a = \frac{\partial u}{\partial a}$，余类推。$\lambda,\mu$为拉密常数，$l,m,n$为三阶弹性常数的默纳汉形式。以上得到的表达式已经假定所有η_{ij}皆不为零，否则要重新计算。在线性弹性波理论中，引入标量势ϕ和矢量势$\boldsymbol{\psi}$，于是位移$\boldsymbol{v}$可表示为

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi + \nabla\times\phi \tag{17.6.7}$$

$$\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3) \tag{17.6.8}$$

将它们代入线性运动方程中(即在(17.6.1)式中令$T_{ij}^{(2)} = 0$)，得到ϕ，$\psi_i (i = 1,2,3)$都满足齐次波动方程。但当$T_{ij}^{(2)} \neq 0$时，如果仍假设(17.6.7)式成立，将它代入(17.6.1)式，可以得到ϕ，ψ_i满足的3个方程组

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial a}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial}{\partial c}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}\right) \\ &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial a}(\nabla^2\phi) + \mu\frac{\partial}{\partial a}(\nabla^2\phi) \\ &+ \mu\frac{\partial}{\partial b}(\nabla^2\psi_3) - \mu\frac{\partial}{\partial c}(\nabla^2\psi_2) + \frac{\partial T_{11}^{(2)}}{\partial a} + \frac{\partial T_{12}^{(2)}}{\partial b} + \frac{\partial T_{13}^{(2)}}{\partial c} \end{aligned} \tag{17.6.9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial b}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2}\right) \\ &= (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial b}(\nabla^2\phi) + \mu\frac{\partial}{\partial c}(\nabla^2\psi_1) \\ &- \mu\frac{\partial}{\partial a}(\nabla^2\psi_3) + \frac{\partial T_{21}^{(2)}}{\partial a} + \frac{\partial T_{22}^{(2)}}{\partial b} + \frac{\partial T_{23}^{(2)}}{\partial c} \end{aligned} \tag{17.6.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\rho_0\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)+\frac{\partial}{\partial a}\left(\rho_0\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial}{\partial b}\left(\rho_0\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)$$

$$=(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial c}\left(\nabla^2\phi\right)+\mu\frac{\partial}{\partial a}\left(\nabla^2\psi_2\right) \tag{17.6.11}$$

$$-\frac{\partial}{\partial b}\left(\nabla^2\psi_1\right)+\frac{\partial T_{31}^{(2)}}{\partial a}+\frac{\partial T_{32}^{(2)}}{\partial b}+\frac{\partial T_{33}^{(2)}}{\partial c}$$

在这组式子中，不妨引入 9 个未知函数 $F_i(i=1,2,\cdots,9)$，令

$$\left.\begin{aligned}
&\square^2\phi-\frac{1}{\lambda+2\mu}T_{11}^{(2)}=\overline{F}_1(a,b,c,t)\\
&\square^2\phi-\frac{1}{\lambda+2\mu}T_{22}^{(2)}=\overline{F}_4(a,b,c,t)\\
&\square^2\phi-\frac{1}{\lambda+2\mu}T_{33}^{(2)}=\overline{F}_7(a,b,c,t)\\
&\square_s^2\psi_2+\frac{1}{\mu}T_{13}^{(2)}=\overline{F}_3(a,b,c,t)\\
&\square_s^2\psi_2-\frac{1}{\mu}T_{31}^{(2)}=\overline{F}_8(a,b,c,t)\\
&\square_s^2\psi_1-\frac{1}{\mu}T_{23}^{(2)}=\overline{F}_5(a,b,c,t)\\
&\square_s^2\psi_1-\frac{1}{\mu}T_{32}^{(2)}=\overline{F}_9(a,b,c,t)\\
&\square_s^2\psi_3+\frac{1}{\mu}T_{12}^{(2)}=\overline{F}_2(a,b,c,t)\\
&\square_s^2\psi_3-\frac{1}{\mu}T_{21}^{(2)}=\overline{F}_6(a,b,c,t)\\
&\overline{F}_i=F_i\begin{cases}\dfrac{1}{\mu}, & i\neq 1,4,7\\ \dfrac{1}{\lambda+2\mu}, & \text{此外情形}\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{17.6.12}$$

式中，$\square^2$ 和 $\square_s^2$ 分别为纵波和横波的达朗贝尔算符

$$\square^2=\nabla^2-\frac{1}{C_l^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},\quad \square_s^2=\nabla^2-\frac{1}{C_s^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{17.6.13}$$

将(17.6.12)式代入(17.6.9)式~(17.6.11)式，可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial a}+\frac{\partial F_2}{\partial b}-\frac{\partial F_3}{\partial c}=0\\ \frac{\partial F_4}{\partial b}+\frac{\partial F_5}{\partial c}-\frac{\partial F_6}{\partial a}=0\\ \frac{\partial F_7}{\partial c}+\frac{\partial F_8}{\partial a}-\frac{\partial F_9}{\partial b}=0\end{aligned}\right\} \tag{17.6.14}$$

要想使(17.6.12)式和(17.6.14)式恒成立，必有

$$\left.\begin{aligned}&F_1-F_7=T_{33}^{(2)}-T_{11}^{(2)}=B_{31}\\ &F_1-F_4=T_{22}^{(2)}-T_{11}^{(2)}=B_{21}\\ &F_3-F_8=T_{31}^{(2)}+T_{13}^{(2)}=A_{31}\\ &F_9-F_5=T_{23}^{(2)}+T_{32}^{(2)}=A_{32}\\ &F_6-F_2=T_{21}^{(2)}+T_{12}^{(2)}=A_{21}\\ &\overline{B}_{ij}=\frac{B_{ij}}{\lambda+2\mu},\quad \overline{A}=\frac{1}{\mu}A_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{17.6.15}$$

式中

$$\overline{T}_{ij}^{(2)}=T_{ij}^{(2)}\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda+2\mu}, & i=j\\ \dfrac{1}{\mu}, & i\neq j\end{cases} \tag{17.6.16}$$

从(17.6.14)式、(17.6.15)式首先可以求出

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 F_1=\rho_D,\quad \overline{\rho}_D=\frac{1}{\lambda+2\mu}\rho_D\\ \rho_D=\frac{\partial^2 A_{32}}{\partial b\partial c}+\frac{\partial^2 A_{21}}{\partial a\partial b}+\frac{\partial^2 A_{13}}{\partial a\partial c}+\frac{\partial^2 B_{21}}{\partial b^2}+\frac{\partial^2 B_{31}}{\partial c^2}\end{aligned}\right\} \tag{17.6.17}$$

即 F_1 满足泊松方程，其三维解为

$$F_1=\frac{-1}{4\pi}\iiint_\tau\frac{\rho_D}{r}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4\pi}\oiint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial F_1}{\partial n}-F_1\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}S \tag{17.6.18}$$

以及

$$F_4 = F_1 + B_{21},\quad F_7 = F_1 - B_{31} \tag{17.6.19}$$

式中，τ 为积分体积，S 为它的界面，如果是无界介质，则(17.6.18)式中的面积分为零，即假设在无限远处不存在“静电荷”。对比(17.6.12)式可知，标量势有唯一的定解,但由(17.6.12)式和(17.6.14)式不能进一步求向量势的定解条件,其原因是这两个式子中只有 8 个方程,而未知函数 F_i 有 9 个，这是由于(17.6.1) 式中有 3 个待定函数 u,v,w，而(17.6.7)式中却引入了 4 个未知函数 ϕ，ψ_1，ψ_2，ψ_3，因而可以任意指定一个条件以使问题能够有唯一解答。经过仔细推敲可知，令 $F_8=0$ 最为方便。将这个条件代入(17.6.14)式和(17.6.15)式，最终可得

$$\left.\begin{aligned} F_8 = 0,\quad F_3 = A_{31},\quad F_9 = \frac{\partial}{\partial c}\int (F_1 - B_{31})\,\mathrm{d}b \\ F_2 = \int\left(\frac{\partial A_{31}}{\partial c} - \frac{\partial F_1}{\partial a}\right)\mathrm{d}b,\quad F_5 = \frac{\partial}{\partial c}\int (F_1 - B_{31})\,\mathrm{d}b - A_{23} \\ F_6 = \int\left(\frac{\partial A_{31}}{\partial c} - \frac{\partial F_1}{\partial a}\right)\mathrm{d}b + A_{21} \end{aligned}\right\} \tag{17.6.20}$$

将 $F_i(i=1,2,\cdots,9)$ 的表式代入(17.6.12)式,容易得到标量势所满足的波动方程组:

$$\begin{aligned} \Box^2\phi = \bar{T}_{11}^{(2)} + \frac{1}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\bar{\rho}_D}{r}\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4\pi}\oiint_S \left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}\left[\Box^2\phi - \bar{T}_{11}^{(2)}\right]\right. \\ \left. - \left[\Box^2\phi - \bar{T}_{11}^{(2)}\right]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}\mathrm{d}S \end{aligned} \tag{17.6.21}$$

$$\begin{aligned} \Box_s^2\psi_1 = -\bar{T}_{32}^{(2)} + \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial c}\int\left\{\frac{1}{4\pi}\iiint_\tau \frac{\bar{\rho}_D}{r}\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{4\pi}\right. \\ \times\oiint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}(\Box^2\phi - \bar{T}_{11}^{(2)}) - (\Box^2\phi - \bar{T}_{11}^{(2)})\right. \\ \left.\left.\times\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}S - \bar{B}_{31}\right\}\mathrm{d}b \end{aligned} \tag{17.6.22}$$

$$\Box_s^2\psi_2 = \bar{T}_{31}^{(2)} \tag{17.6.23}$$

$$\square_s^2\psi_3=\bar{T}_{12}^{(2)}+\frac{\partial}{\partial c}\int\bar{A}_{31}\,\mathrm{d}b-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\frac{\partial}{\partial a}\int\left\{\frac{1}{4\pi}\right.$$
$$\times\iiint_\tau\frac{\bar{\rho}_D}{r}\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4\pi}\oiint_S\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}(\square^2\phi-\bar{T}_{11}^{(2)})\right.$$
$$\left.\left.-(\square^2\phi-\bar{T}_{11}^{(2)})\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}S\right\}\mathrm{d}b \tag{17.6.24}$$

显然，这 4 个方程的右端至少都是二阶量，在线性近似条件下，右端都是零，即一阶势函数都满足齐次波动方程。但在有限振幅波的情况下，它们的右端(源函数项)不为零，表明固体介质中存在非线性波源，其第一类源函数$\bar{T}_{ij}^{(2)}$及其类似项是依赖于源所在处的声场情况，故称为局部源；第二类源函数是关于体积分的那一项，它表明这一点的源强度取决于全空间的点的贡献；第三类源是面积分项，它表明这一点的源强度还取决于边界点(如果存在的话)的贡献，后两类源称为非局部性的源。当然，严格说来，ϕ，ψ_i满足的是(17.6.21)式~(17.6.24)式的积分微分波动方程组，但可以用迭代法求解。

对于二维情况，泊松方程(17.6.17)的解为

$$F_1=-\frac{1}{2\pi}\iint_D\rho_D\ln\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}s+\frac{1}{2\pi}\oint_L\left[\ln\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial F_1}{\partial n}-F_1\frac{\partial}{\partial n}\ln\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{d}l \tag{17.6.25}$$

式中，D为二维区域，L为它的边界线，而

$$r=\left[(a-a_0)^2+(b-b_0)^2\right]^{1/2}$$

式中，(a,b)为“场点”，(a_0,b_0)为“源点”，即在(17.6.25)式中$F_1=F_1(a,b,t)$，积分对a_0,b_0进行。在(17.6.18)式中$r=\left[(a-a_0)^2+(b-b_0)^2+(c-c_0)^2\right]^{1/2}$，其中的积分是对$(a_0,b_0,c_0)$进行。利用波动方程组(17.6.21)式~(17.6.24)可以处理有限振幅波在边界的反射和透射问题，特别是在斜入射的情况下更为有用，17.13 节将讨论边值问题的解。

在建立二阶势的理论过程中，尽管我们选取了不同的条件，借以得到φ和ψ_2的二阶场，这样得到的解也许会有一定差异，但容易证明，由这些量得到的位移场、速度场等可测量的场值是唯一的，这与电磁场理论中一样，在引入矢量势和标量势的情况下，在不同的规范条件下，这些势函数的表达形式有一定的差异，但得到的电场和磁场的表达式却是唯一的。

正如 17.6 节中指出的，用位移表示的波动方程在讨论边界问题时是不方便的，

特别当入射波是纵波或者是横波，而且是对边界斜入射时，就非常不方便。但用势函数表示的波动方程组来研究边界问题时，就不存在这个麻烦。所谓纵波是指位移方向与传播方向相同，在传播过程中介质有体积变化，或者其位移散度不为零的那种波，在地震波中称其为 P 波，它与本节的标量势 ϕ 相对应；而横波是指位移方向与传播方向垂直，在传播过程中介质无体积变化，或者其位移散度为零的那一类波，在三维振动问题，与传播相垂直的有两个独立的方向，即横波有两个偏振面，在地震波中将位移处在传播平面内的这种横波称为 SV 波；而将位移分量垂直于传播平面内的另一种横波称 SH 波。

17.7　各向异性固体中的三阶弹性能[1~4, 10]

以上几节我们讨论了各向同性固体介质中的有限振幅波的传播，在这种介质中，由于几何对称性，独立的二阶弹性常数有两个，独立的三阶弹性常数有 3 个。但对于大多数固体介质来说，情况并不是如此简单，因为它们是各向异性的，如晶体或者具有晶格结构的介质即是如此。根据结晶学的分类，共有七大晶系即三斜、单斜、正交、四方、三角、六角和立方晶系，包括 32 个晶类(点群)，而点群的生成元有点对称、轴对称及面对称的三种操作，或者由这些操作组成的积。

根据 17.5 节可知，对于理想的弹性介质来说，弹性能是应变的函数，其二阶弹性常数为 C_{ijkl}，或者简写为 C_{ij}，三阶弹性常数 C_{ijklmn}，或者简写为 C_{ijk}。对于一般的晶体如三斜晶系，由于没有空间对称性，其独立的 C_{ij} 有 21 个，独立的 C_{ijk} 有 56 个，今证明之。

将弹性能 $\boldsymbol{\Phi}$ 写成张量形式，即

$$\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\Phi}_2+\boldsymbol{\Phi}_3=C_{ijkl}\eta_{ij}\eta_{kl}+C_{ijklmn}\eta_{ij}\eta_{kl}\eta_{mn}\qquad i,j,\cdots=1,2,3 \tag{17.7.1}$$

式中，C_{ijkl} 和 C_{ijklmn} 分别为四阶张量和六阶张量，一般情况下，它们的总数目分别为 81 个和 729 个，但由应变矩阵的定义可知，$\eta_{ij}=\eta_{ji}$ 故当 i, j; k, l 和 m, n 两两交换时，合并 $\boldsymbol{\Phi}$ 式中的同类项，则 C_{ijkl} 减为 36 个，C_{ijklmn} 减为 216 个，再根据沃伊特的简写符号，将它们简写为 C_{ij} 和 C_{ijk}，于是相应的应变简写为 η_i,η_j 和 η_k，于是(17.7.1)式简写为

$$\boldsymbol{\Phi}=C_{ij}\eta_i\,\eta_j+C_{ijk}\eta_i\eta_j\eta_k,\ i,j,k,\cdots=1,2,\cdots,6 \tag{17.7.2}$$

将 $\eta_i\eta_j$ 项与 $\eta_j\eta_i$ 项合并，独立的 C_{ij} 进一步减为 $(36-6)/2+6=21$ 个，同理 C_{ijk} 则减为 56 个，现证明如下：

$$i \neq j \neq k \text{时，有} \frac{6\times5\times4}{3!} = 20 \text{项}$$

$$i = j \neq k \text{时，有} \frac{6\times6\times5}{3!} = 30 \text{项}$$

$$i = j = k \text{时,有 6 项}$$

故总数为 56 项，因此三阶弹性能可表示为

$$\begin{array}{llllll}
C_{111}\eta_1^3 & +C_{112}\eta_1^2\eta_2 & +C_{113}\eta_1^2\eta_3 & +C_{114}\eta_1^2\eta_4 & +C_{115}\eta_1^2\eta_5 & +C_{116}\eta_1^2\eta_6 \\
 & +C_{122}\eta_1\eta_2^2 & +C_{123}\eta_1\eta_2\eta_3 & +C_{124}\eta_1\eta_2\eta_4 & +C_{125}\eta_1\eta_2\eta_5 & +C_{126}\eta_1\eta_2\eta_6 \\
 & & +C_{133}\eta_1\eta_3^2 & +C_{134}\eta_1\eta_3\eta_4 & +C_{135}\eta_1\eta_3\eta_5 & +C_{136}\eta_1\eta_3\eta_6 \\
 & & & +C_{144}\eta_1\eta_4^2 & +C_{145}\eta_1\eta_4\eta_5 & +C_{146}\eta_1\eta_4\eta_6 \\
 & & & & +C_{155}\eta_1\eta_5^2 & +C_{156}\eta_1\eta_5\eta_6 \\
 & & & & & C_{166}\eta_1\eta_6^2 \\
 & +C_{222}\eta_2^3 & +C_{223}\eta_2^2\eta_3 & +C_{224}\eta_2^2\eta_4 & +C_{225}\eta_2^2\eta_5 & +C_{226}\eta_2^2\eta_6 \\
 & & +C_{233}\eta_2\eta_3^2 & +C_{234}\eta_2\eta_3\eta_4 & +C_{235}\eta_2\eta_3\eta_5 & +C_{236}\eta_2\eta_3\eta_6 \\
 & & & +C_{244}\eta_2\eta_4^2 & +C_{245}\eta_2\eta_4\eta_5 & +C_{246}\eta_2\eta_4\eta_6 \\
 & & & & +C_{255}\eta_2\eta_5^2 & +C_{256}\eta_2\eta_5\eta_6 \\
 & & & & & +C_{226}\eta_2\eta_6^2 \\
 & & +C_{333}\eta_3^3 & +C_{334}\eta_3^2\eta_4 & +C_{335}\eta_3^2\eta_5 & +C_{336}\eta_3^2\eta_6 \\
 & & & +C_{344}\eta_3\eta_4^2 & +C_{345}\eta_3\eta_4\eta_5 & +C_{346}\eta_3\eta_4\eta_6 \\
 & & & & +C_{355}\eta_3\eta_5^2 & +C_{356}\eta_3\eta_5\eta_6 \\
 & & & & & +C_{366}\eta_3\eta_6^2 \\
 & & & +C_{444}\eta_4^3 & +C_{445}\eta_4^2\eta_5 & +C_{446}\eta_4^2\eta_6^2 \\
 & & & & +C_{455}\eta_4\eta_5^2 & +C_{456}\eta_4\eta_5\eta_6 \\
 & & & & & +C_{466}\eta_4\eta_6^2 \\
 & & & & +C_{555}\eta_5^3 & +C_{556}\eta_5^2\eta_6 \\
 & & & & & +C_{566}\eta_5\eta_6^2 \\
 & & & & & +C_{666}\eta_6^3
\end{array} \tag{17.7.3}$$

在伯奇(Birch) [10]的文章由于排印失误，漏了(17.7.3)式中倒数第二项。

对于有对称性的晶体来说,独立的弹性常数的数目将进一步减少，例如立方晶系(按赫尔曼(Hermann) － 莫吉恩(Mauguin)符号，432, $\bar{4}3m$, $\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$, 23, $\frac{2}{m}\bar{3}$)，有 3 个独立的 C_{ij}，但是独立的 C_{ijk} 却不一样多，前三种晶体对称度高，有 6 个独立

的三阶弹性常数，后两种晶体却有 8 个。关于 3 个独立的 C_{ij} 的证明已见之于线性弹性理论书籍，本节仅讨论立方晶系的三阶弹性常数的数目。

从几何图形可知，一个正方体结构至少有如下的几类对称轴。第一类为垂直于三对界面并通过中心的 3 个轴，围绕它们中的任一个转 90°，则出现重复的晶体结构，结晶学中将这类对称轴称为四次对称轴，简称四次轴(在国际符号中用 4 表示)。第二类对称轴是通过立方体 8 个顶点的 4 根对角线，绕任一根对角线转 120°，则出现重复结构，这种对称轴称为三次对称轴，简称三次轴，并用符号 3 表示。以此类推，绕某轴转 180° 使得结构重复，则称此轴为二次轴，用符号 2 表示。例如，立方体中连接棱边中点且通过立方中心的有 6 根线，它们都是二次轴(图 17.1(a))。

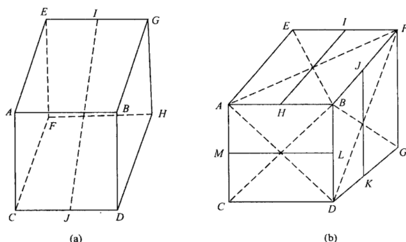


图 17.1　立方体对称轴

此外，如果晶体结构存在一个镜面对称，则称这个面为对称面，立方体有 9 个对称面，其中 3 个正切面和 6 个斜切面(图 17.1(b))，对称面用符号 m 表示，若某晶体有一个四次轴和一个与它垂直的对称面，则用组合符号 $\dfrac{4}{m}$ 表示。

还有一类所谓点对称,即如果某点的向径为 $\boldsymbol{r}$，通过该点作所谓点对称操作，则 $\boldsymbol{r}$ 成为 $-\boldsymbol{r}$。例如，有一个组合操作是先作一个三次旋转轴对称操作，然后再作一个点对称操作，则组合操作可表为 $\overline{3}$，其他类推。

现在根据晶体对称性来进一步减少立方晶体的弹性常数的个数。取正立方体的 3 个四次轴为坐标轴 x_1, x_2, x_3,绕它的三次轴作旋轴变换，即转 120°，于是得到一组新的坐标轴 x_1', x_2', x_3',显然,这两组坐标之间的变换关系为

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1' & x_2' & x_3' \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \tag{17.7.4}$$

即 x_1 转到了 x_2' 的位置，x_2 转到了 x_3' 的位置，x_3 转到了 x_1' 的位置,在这样的坐标变换下，新老应变张量之间有如下的关系，即

$$\boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\alpha}^{*}\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\alpha} \tag{17.7.5}$$

或者

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \eta_{11}' & \eta_{12}' & \eta_{13}' \\ \eta_{21}' & \eta_{22}' & \eta_{23}' \\ \eta_{31}' & \eta_{32}' & \eta_{33}' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \eta_1' & \eta_6' & \eta_5' \\ \eta_6' & \eta_2' & \eta_4' \\ \eta_5' & \eta_4' & \eta_3' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_6 & \eta_5 \\ \eta_6 & \eta_2 & \eta_4 \\ \eta_5 & \eta_4 & \eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \eta_3 & \eta_5 & \eta_4 \\ \eta_5 & \eta_1 & \eta_6 \\ \eta_4 & \eta_6 & \eta_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

于是有

$$\left.\begin{aligned} \eta_1' = \eta_3, \quad \eta_2' = \eta_1, \quad \eta_3' = \eta_2 \\ \eta_4' = \eta_6, \quad \eta_5' = \eta_4, \quad \eta_6' = \eta_5 \end{aligned}\right\} \tag{17.7.6}$$

正立方晶体作了120°旋转变换后结构重复，其弹性能不变。另外,这种变换只改变应变分量，但弹性常数不变，利用(17.7.3)式有

$$\begin{aligned}
\Phi(\eta') &= C_{111}\eta_1'^3 + C_{112}\eta_1'^2\eta_2' + \cdots + C_{222}\eta_2'^3 + C_{223}\eta_2'^2\eta_3' \\
&\quad + \cdots + C_{333}\eta_3'^3 + C_{334}\eta_3'^2\eta_4' + \cdots + C_{666}\eta_6'^3 \\
&= C_{111}\eta_3^3 + C_{112}\eta_3^2\eta_1 + \cdots + C_{222}\eta_1^3 + C_{223}\eta_1^2\eta_2 + \cdots \\
&\quad + C_{333}\eta_2^3 + C_{334}\eta_2^2\eta_6 + \cdots + C_{666}\eta_5^3
\end{aligned} \tag{17.7.7}$$

由于晶体的对称性，故在这样的变换下弹性能保持不变，即

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\eta}') = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\eta})$$

即(17.7.7)式应等于(17.7.3)式，由此得到

$$
\begin{aligned}
&(C_{111}-C_{112})\eta_1^3+(C_{222}-C_{333})\eta_2^3+(C_{333}-C_{111})\eta_1^3+\cdots \\
&+(C_{133}-C_{112})\eta_3^2\eta_1+\cdots+(C_{226}-C_{334})\eta_2^2\eta_6+\cdots \\
&+(C_{112}-C_{223})\eta_1^2\eta_2+\cdots+(C_{555}-C_{666})\eta_5^3=0
\end{aligned}
$$

由于应变量为任意变量，故要使上式恒成立，只有要求系数相等，即

$$C_{111}=C_{222}=C_{333},\ C_{112}=C_{133}=C_{223},\ \cdots$$

这样使得 56 个常数减少到 20 个，故存在三次对称轴的晶体的独立的三阶弹性常数不会多于 20 个。

如果晶体除了有三次轴外，还有二次轴，则绕二次轴(取为 x_3轴)转180°，新旧坐标满足

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & x_1' & x_2' & x_3' \\
\hline
x_1 & -1 & 0 & 0 \\
x_2 & 0 & -1 & 0 \\
x_3 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\qquad (17.7.8)
$$

根据同样的方法可得

$$
\begin{aligned}
&\eta_1'=\eta_1,\quad \eta_2'=\eta_2,\quad \eta_3'=\eta_3 \\
&\eta_4'=-\eta_4,\quad \eta_5'=-\eta_5,\quad \eta_6'=\eta_6
\end{aligned}
\qquad (17.7.9)
$$

再利用弹性能不变原理可以得到如下的结果，即 20 个常数进一步减为 8 个

$$C_{111},\ C_{112},\ C_{113},\ C_{123},\ C_{144},\ C_{155},\ C_{166},\ C_{456}$$

余者为零。这个结果表明，具有三次轴和二次轴的晶体，其独立的三阶弹性常数不会多于 8 个。

同理如果晶体还具有四次轴，则再作 90° 旋转变换，则有

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & x_1' & x_2' & x_3' \\
\hline
x_1 & 0 & -1 & 0 \\
x_2 & 1 & 0 & 0 \\
x_3 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\tag{17.7.10}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&\eta_1' = \eta_2, \quad \eta_2' = \eta_1, \quad \eta_3' = \eta_3 \\
&\eta_4' = -\eta_5, \quad \eta_5' = \eta_4, \quad \eta_6' = -\eta_6
\end{aligned}
\tag{17.7.11}
$$

从弹性能不变原理得到

$$
C_{112} = C_{113}, \quad C_{155} = C_{166}
$$

由此可见，具有二次轴、三次轴及四次轴的立方晶体的独立三阶常数是 6 个。从上述推导，伯奇得到了下述结果,即对于对称度最高的立方晶体432, $\bar{4}3m$, $\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}$ 来说，其弹性能的表达式可表示为

$$
\begin{aligned}
\varPhi = &\frac{1}{2}C_{11}(\eta_{11}^2 + \eta_{22}^2 + \eta_{33}^2) + C_{12}(\eta_{11}\eta_{22} + \eta_{22}\eta_{33} + \eta_{33}\eta_{11}) \\
&+ C_{44}(\eta_{12}^2 + \eta_{21}^2 + \eta_{23}^2 + \eta_{32}^2 + \eta_{31}^2 + \eta_{13}^2) \\
&+ C_{111}(\eta_{11}^3 + \eta_{22}^3 + \eta_{33}^3) + C_{112}[\eta_{11}^2(\eta_{22} + \eta_{33}) \\
&+ \eta_{22}^2(\eta_{33} + \eta_{11}) + \eta_{33}^2(\eta_{11} + \eta_{22})] \\
&+ \frac{1}{2}C_{144}[\eta_{11}(\eta_{23}^2 + \eta_{32}^2) + \eta_{22}(\eta_{31}^2 + \eta_{13}^2) + \eta_{33}(\eta_{12}^2 + \eta_{21}^2)] \\
&+ \frac{1}{2}C_{166}[(\eta_{12}^2 + \eta_{21}^2)(\eta_{11} + \eta_{22}) + (\eta_{23}^2 + \eta_{32}^2)(\eta_{22} + \eta_{33}) + (\eta_{31}^2 + \eta_{13}^2)(\eta_{33} + \eta_{11})] \\
&+ \frac{1}{2}C_{123}\eta_{11}\eta_{22}\eta_{33} + C_{456}[\eta_{12}\eta_{23}\eta_{31} + \eta_{21}\eta_{32}\eta_{13}]
\end{aligned}
\tag{17.7.12}
$$

为了使书写结构对称便于记忆，本节的应变分量未使用简写符号。

由于布鲁格的热力学定义下的弹性表达式似乎越来越被人们所采用，下面列出伯奇与布鲁格三阶常数之间的关系式:

伯奇 C_{ijk} 布鲁格

$$
\left.\begin{array}{ll}
C_{111} & \frac{1}{6}C_{111} \\
C_{112} & \frac{1}{2}C_{112} \\
C_{144} & 2C_{144} \\
C_{166} & 2C_{166} \\
C_{123} & C_{123} \\
C_{456} & 4C_{456}
\end{array}\right\} \tag{17.7.13}
$$

17.8　沿立方晶体[100]方向传播的有限振幅平面波[1,4]

取传播方向为 a 轴，则位移分量可表示为

$$
u = u(a,t),\ \ v = v(a,t),\ \ w = w(a,t) \tag{17.8.1}
$$

雅可比矩阵为

$$
\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1+u_a & 0 & 0 \\ v_a & 1 & 0 \\ w_a & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17.8.2}
$$

应变分量为

$$
\left.\begin{aligned}
\eta_{11} &= u_a + \frac{1}{2}\left(u_a^2 + v_a^2 + w_a^2\right) \\
\eta_{12} &= \eta_{21} = \frac{1}{2}v_a \\
\eta_{13} &= \eta_{31} = \frac{1}{2}w_a
\end{aligned}\right\} \tag{17.8.3}
$$

其余的为零。将它们代入(17.7.12)式，得到

$$
\begin{aligned}
\Phi = {} & \frac{1}{2}C_{11}\eta_{11}^2 + C_{44}\left(\eta_{12}^2 + \eta_{21}^2 + \eta_{31}^2 + \eta_{13}^2\right) + C_{111}\eta_{11}^3 \\
& + \frac{1}{2}C_{166}\left[\eta_{11}\left(\eta_{12}^2 + \eta_{21}^2 + \eta_{13}^2 + \eta_{31}^2\right)\right]
\end{aligned} \tag{17.8.4}
$$

将 Φ 代入(17.2.6)式求得 T_{ij}，并将所得结果代入(17.5.1)式便得到波动方程组

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{C_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}&=\frac{3C_{11}+C_{111}}{C_{11}}\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}\\
&\quad+\left(1+\frac{C_{166}}{C_{11}}\right)\left[\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}+\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}\right]\\
\frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}&=\frac{C_{11}+C_{166}}{C_{44}}\left[\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}+\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}\right]\\
\frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}&=\frac{C_{11}+C_{166}}{C_{44}}\left[\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}+\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}\right]
\end{aligned}\right\}\tag{17.8.5}$$

其中的三阶弹性常数属于布鲁格定义，令

$$\left.\begin{aligned}
\beta&=3+\frac{C_{111}}{C_{11}}\\
\gamma&=\frac{C_{11}+C_{166}}{C_{44}}
\end{aligned}\right.\tag{17.8.6}$$

从形式上来看，(17.8.5)式与各向性弹性体的平面波情况下的(17.4.6)式~(17.4.8)式形式相同，故那里的解答可以直接引用。对于纯纵波传播的情况，波动方程可写为

$$\frac{1}{C_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}=\beta\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}\tag{17.8.7}$$

解可表示为

$$u(a,t)=A\sin(ka-wt)-\frac{\beta k^2A^2}{8}a\cos 2(ka-wt)\tag{17.8.8}$$

布雷齐尔(Breazeale)和福特(Ford)将(17.8.7)式改写成

$$\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=K_2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}+3\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}\right)+K_3\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}\tag{17.8.9}$$

式中

$$K_2=C_{11},\quad K_3=C_{111},\quad \beta=3+\frac{K_3}{K_2}\tag{17.8.10}$$

解仍是(17.8.8)式，对应的冲击波形成距离为

$$X_p = -\frac{2C_l^2}{\beta\omega u_0} \tag{17.8.11}$$

式中

$$C_l = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho_0}} \tag{17.8.12}$$

式中，u_0 为 $a=0$ 处 u 的振幅。存在 X_p 表明，在传播过程中波畸变。从(17.8.5)式的后两个方程可知，只当纵波和横波的基波都存在时，才能产生横波的二阶谐波。

17.9 沿立方晶体[110]方向传播的有限振幅平面波[4]

取[100]为 a 轴的方向，[010]为 b 轴的方向，[001]为 c 轴的方向，故[110]的方向是在 a,b 平面内且与 a 轴成45°的方向上。为此，绕 c 轴作45°旋转的坐标变换，使得新坐标 a' 即为[110]方向，b' 为[$\bar{1}10$]方向，c' 仍为[001]方向，新旧坐标关系为

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{17.9.1}$$

故在新坐标系中的位移为

$$u' = u'(a',t), \quad v' = v'(a',t), \quad w' = w'(a',t) \tag{17.9.2}$$

对应的应变分量为

$$\left.\begin{aligned} \eta'_{11} &= \frac{\partial u'}{\partial a'} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u'}{\partial a'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial a'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial a'}\right)^2\right] \\ \eta'_{12} &= \eta'_{21} = \frac{1}{2}\frac{\partial v'}{\partial a'} \\ \eta'_{13} &= \eta'_{31} = \frac{1}{2}\frac{\partial w'}{\partial a'} \end{aligned}\right\} \tag{17.9.3}$$

利用(17.7.5)式子，可以从 η'_{ij} 来求 η_{ij}，从(17.9.1)式可知，变换矩阵 α 为

$$\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix} \tag{17.9.4}$$

于是有

$$\left.\begin{aligned} \eta_{11}&=\frac{1}{2}(\eta'_{11}-2\eta'_{21}),\ \eta_{12}=\frac{1}{2}\eta'_{11},\ \eta_{13}=\frac{1}{\sqrt{2}}\eta'_{13}\\ \eta_{21}&=\frac{1}{2}\eta'_{11},\ \eta_{22}=\frac{1}{2}(\eta'_{11}+2\eta'_{12}),\ \eta_{23}=\frac{1}{\sqrt{2}}\eta'_{13}\\ \eta_{31}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\eta'_{13},\ \eta_{32}=\frac{1}{\sqrt{2}}\eta'_{13},\ \eta_{33}=0 \end{aligned}\right\} \tag{17.9.5}$$

旋轴变换后的弹性能为

$$\begin{aligned} \Phi(\eta')&=\frac{1}{4}C_{11}\left(\eta'^2_{11}+4\eta'^2_{12}\right)+\frac{1}{4}C_{12}\left(\eta'^2_{11}-4\eta'^2_{12}\right)\\ &+\frac{1}{2}C_{44}\left(\eta'^2_{11}+4\eta'^2_{13}\right)+\frac{1}{4}C_{111}\left(\eta'^3_{11}+12\eta'_{11}\eta'^2_{12}\right)\\ &+\frac{1}{4}C_{112}\left(\eta'^3_{11}-4\eta'_{11}\eta'^2_{12}\right)+\frac{1}{2}C_{114}\eta'_{11}\eta'^2_{13}\\ &+\frac{1}{4}C_{166}\left(\eta'^3_{11}+2\eta'_{11}\eta'^2_{13}\right)+\frac{1}{2}C_{456}\eta'_{11}\eta'^2_{13} \end{aligned} \tag{17.9.6}$$

将这个式子代入(17.2.5)式，再将所得到的结果代入(17.5.1)式最终得到沿[110]方向传播的有限振幅平面波的波动方程组:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{C_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}&=\beta\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}+\gamma_1\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}+\gamma_2\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}\\ \frac{1}{C_{t1}^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}&=\gamma_1\left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}+\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}\right)\\ \frac{1}{C_{t2}^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}&=\gamma_2\left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}+\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{17.9.7}$$

在这个式子中，为书写简便起见,在u',v',w'及a'上省去了它们的撇号，而

$$\left.\begin{aligned} C_l &= \sqrt{\frac{C_{11}+C_{12}+2C_{44}}{2\rho_0}} \\ C_{t1} &= \sqrt{\frac{C_{11}-C_{12}}{2\rho_0}} \\ C_{t2} &= \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho_0}} \end{aligned}\right\} \tag{17.9.8}$$

这里的三阶弹性常数用伯奇定义，而β,γ_1,γ_2表示如下:

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 3\left(1+\frac{C_{111}+C_{112}+C_{166}}{C_{11}+C_{12}+2C_{44}}\right) \\ \gamma_1 &= \frac{C_{11}+C_{12}+C_{44}}{C_{11}-C_{12}}+\frac{3C_{111}-C_{112}}{C_{11}-C_{12}} \\ \gamma_2 &= 1+\frac{1}{2}\frac{C_{11}+C_{12}}{C_{44}}+\frac{1}{4}\frac{C_{144}+C_{166}+C_{456}}{C_{44}} \end{aligned}\right\} \tag{17.9.9}$$

如果三阶弹性常数用布鲁格定义下的量，则有

$$\left.\begin{aligned} \beta &= 3+\frac{1}{2}\frac{C_{111}+3C_{112}+12C_{166}}{C_{11}+C_{12}+2C_{44}} \\ \gamma_1 &= \frac{C_{11}+C_{12}+2C_{44}}{C_{11}-C_{12}}+\frac{1}{2}\frac{C_{111}-C_{112}}{C_{11}-C_{12}} \\ \gamma_2 &= 1+\frac{1}{2}\frac{C_{11}+C_{12}}{C_{44}}+\frac{1}{2}\frac{C_{144}+C_{166}+2C_{456}}{C_{44}} \end{aligned}\right\} \tag{17.9.10}$$

显然，此结果与前面几节讨论过的有不同之处。例如，两个横波传播速度不等，以及$\gamma_1 \neq \gamma_2$。布雷齐尔和福特曾将纯纵波激励的波动方程改写成(17.8.9)式的形式，但各个常数定义如下:

$$\left.\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2}(C_{11}+C_{12}+2C_{44}) \\ K_3 &= \frac{1}{4}(C_{111}+3C_{112}+12C_{166}) \\ \beta &= 3+\frac{K_3}{K_4} \end{aligned}\right\} \tag{17.9.11}$$

17.10 沿立方晶体[111]方向传播的有限振幅平面波[4]

取坐标轴 a，b，c 分别为立方体的[100],[010],[001]的方向，如果以原点为立方体的一个顶点，而通过该顶点的 3 个棱为坐标轴，则[111]方向是由原点到最远顶点所作的射线方向，如将它定为 a' 的方向，则 b' 和 c' 的方向为 $[11\bar{2}]$,$[\bar{1}10]$,由此得到变换矩阵:

$$
\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 1 & 1 & -2\\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & 0\end{pmatrix} \tag{17.10.1}
$$

与 17.9 节的推导方法相同，可以导出沿[111]方向传播的波动方程组(省去所有的撇号)为

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1}{C_l^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}&=\beta\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}+\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}+\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}\right)\\
\frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}&=\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}+\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}-\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}\right)\\
\frac{1}{C_t^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}&=\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}+\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial^2 u}{\partial a^2}\right)+\varepsilon\left(\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial^2 w}{\partial a^2}+\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial^2 v}{\partial a^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{17.10.2}
$$

式中

$$
C_l=\sqrt{\frac{C_{11}+2C_{12}+4C_{44}}{3\rho_0}},\quad C_t=\sqrt{\frac{C_{11}-C_{12}-C_{44}}{3\rho_0}} \tag{17.10.3}
$$

如果三阶弹性常数是在伯奇定义下，则

$$
\left.\begin{aligned}
\beta&=3+\frac{2}{3}\frac{3C_{111}+6C_{112}+3C_{144}+6C_{166}+C_{123}+2C_{456}}{C_{11}+2C_{12}+4C_{44}}\\
\gamma&=\left(\frac{C_l}{C_t}\right)^2\left(1+\frac{1}{6}\frac{12C_{111}-3C_{144}+6C_{166}-2C_{123}-C_{456}}{C_{11}+2C_{12}+4C_{44}}\right)\\
\varepsilon&=\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{C_l}{C_t}\right)^2\times\left(\frac{12C_{111}-12C_{112}+3C_{144}-3C_{166}+4C_{123}-C_{456}}{C_{11}+2C_{12}+4C_{44}}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{17.10.4}
$$

如果三阶弹性常数是在布鲁格定义下，则

$$\left.\begin{aligned}\beta &= 3+\frac{1}{3}\frac{C_{111}+6C_{112}+12C_{144}+24C_{166}+2C_{123}+16C_{456}}{C_{11}+2C_{12}+4C_{44}}\\ \gamma &= \left(\frac{C_l}{C_t}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{C_{111}-3C_{144}+6C_{166}-C_{123}-2C_{456}}{C_{11}+2C_{12}+4C_{44}}\right)\\ \varepsilon &= \frac{\sqrt{2}}{6}\left(\frac{C_l}{C_t}\right)^2\times\left(\frac{C_{111}-3C_{112}+3C_{144}-3C_{166}+2C_{123}-2C_{456}}{C_{11}+2C_{12}+4C_{44}}\right)\end{aligned}\right\} \quad (17.10.5)$$

由(17.10.2)式可见，纯纵波的基波能产生它的二阶谐波，而纯横波的基波不仅能产生纯纵波的二阶谐波，而且能产生纯横波的二阶谐波，因此，沿[111]方向的传播情况比以前见到的要复杂。如果写成布雷齐尔和福特形式，则 K_2 和 K_2 为

$$\left.\begin{aligned}K_2 &= \frac{1}{3}(C_{11}+2C_{12}+4C_{44})\\ K_3 &= \frac{1}{9}(C_{111}+6C_{112}+12C_{144}+24C_{166}+2C_{123}+16C_{456})\end{aligned}\right\} \quad (17.10.6)$$

17.11　波动方程组的正交变换[11,12]

我们已经讨论了立方晶体中波传播的特殊情形，即沿晶体的 3 个对称方向传播，这样的波动方程组中 3 个方向的位移量在线性项中没有交叉项，从而便于求解。但在一般情况下，交叉项会出现的，因此，必须采取线性变换予以消除。

通常如将固体的弹性能公式代入运动方程中，考虑到晶体的某些对称性，得到的波动方程一般说来有如下形式：

$$u_{i,tt}=\sum_{j=1}^{3}A_{ij}u_{j,aa}+\sum_{j,l=1}^{3}B_{ijl}u_{j,a}u_{l,aa},\quad i=1,2,3 \quad (17.11.1)$$

式中，A_{ij} 和 B_{ijl} 分别为二阶弹性和三阶弹性常数，而

$$u_{i,tt}=\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},\quad u_{i,a}=\frac{\partial u_i}{\partial a},\quad u_{i,aa}=\frac{\partial^2 u_i}{\partial a^2}$$

显然，波动方程组(17.11.1)的右端第一项的下标 j 从 1 变到 3，故波动方程中的因变量是有偶合的，不便于用微扰法求解波动方程，因此，必须对 u_i 实行线性变换来消除这种偶合。为讨论方便，将(17.11.1)式写成矩阵形式

$$\boldsymbol{U}_{tt}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}_{aa}+\boldsymbol{U}_a^{*}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{aa} \quad (17.11.2)$$

令

$$U = SP \tag{17.11.3}$$

式中，$U=(u_i)$，$P=(P_i)$，$S=(s_{ij})$，将(17.11.3)式代入到(17.11.2)式，设 S 为非奇矩阵，则有

$$P_{tt} = S^{-1}ASP_{aa} + S^{-1}P_a^{*}S^{*}BSP_{aa} \tag{17.11.4}$$

要求

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \Lambda \tag{17.11.5}$$

如果满足这些条件的矩阵 S 及其逆矩阵 S^{-1} 存在，则关于 P 的波动方程(17.11.4)便于使用微扰法来求解，$\lambda_i\,(i=1,2,3)$ 为矩阵 A 的 3 个特征值，它们可以根据通常的代数方法求得，即由

$$AS - S\Lambda = 0 \tag{17.11.6}$$

求出，因 A_{ij} 是已知的，故可以由这个式子求出特征值 λ_i 和对应的特征向量 s_{ij}。根据矩阵方程(17.11.6)，容易得到

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_i & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_i & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S_{3i} \end{pmatrix} = 0, \quad i=1,2,3 \tag{17.11.7}$$

特征值满足行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{17.11.8}$$

为了书写方便，将 A_{ij} 写成 a_{ij}。对于已知的晶体，弹性常数是已知的，从而能求出 λ_i, s_{ij}，因而波动方程(17.11.4)成为规范形式，便于求解。布雷齐尔、霍尔特(Holt)、福特以及姜文华和杜功焕应用这种方法研究了一类晶体的非线性声学性质。

17.12 附加压力或应力的立方晶体中的波[4]

上面几节表明，对称度最高的立方晶体的独立的三阶弹性常数有 6 个，如果

利用纯纵波或纯横波等方式来激励，只能得到 3 个关系，要想完全决定 6 个常数，还要寻找其他关系，如仍用附加压力或应力的方法求得。与前面作法完全相同，将弹性能表达式(17.7.3)代入到应变表达式及应力表达式，再将所得结果代入到运动方程式，最终可得到形如(17.6.1)式~(17.6.4)式的式子，其中应力T_{ij}的表示式如下：

$$
\left.\begin{aligned}
T_{11} &= C_{11}\left(u_a + \frac{3}{2}u_a^2 + \frac{1}{2}v_a^2 + \frac{1}{2}w_a^2\right) \\
&\quad + C_{12}\left[v_b + w_c + (v_b + w_c)u_a + \frac{1}{2}(u_b^2 + v_b^2 + w_b^2 + u_c^2 + v_c^2 + w_c^2)\right] \\
&\quad + C_{44}(u_b^2 + u_c^2 + u_b v_a + u_c w_a) + 3C_{111}u_a^2 + C_{112}\left[v_b^2 + w_c^2 + 2u_a(v_b + w_c)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}C_{144}(v_c + w_b)^2 + \frac{1}{4}C_{166}\left[(u_b + v_a)^2 + (u_c + w_a)^2\right] + C_{123}v_b w_c \\
T_{12} &= C_{11}u_b v_b + C_{12}(u_a + w_c)u_b \\
&\quad + C_{44}\left[u_b + v_a + (2u_b + v_a)u_a + v_a v_b + (u_c + w_a)w_b + u_c v_c\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}C_{144}(u_b + v_a)w_c + \frac{1}{2}C_{166}\left[(u_a + v_b)(u_b + v_a)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}C_{456}\left[(u_c + w_a)(v_c + w_b)\right] \\
T_{13} &= C_{11}u_c w_c + C_{12}(u_a + v_b)u_c \\
&\quad + C_{44}\left[u_c + w_a + (2u_c + w_a)u_a + w_a w_c + (v_a + u_b)v_c + u_b w_b\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}C_{144}(u_c + w_a)v_b + \frac{1}{2}C_{166}\left[(u_c + w_a)(u_a + w_c)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}C_{456}\left[(v_c + w_b)(u_b + v_a)\right] \\
T_{21} &= C_{11}v_a u_a + C_{12}v_a(v_b + w_c) + C_{44}\left[u_b + v_a\right. \\
&\quad \left. + u_a u_b + v_b(2v_a + u_b) + w_a w_b + v_c(u_c + w_a)\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}C_{144}w_c(u_b + v_a) + \frac{1}{2}C_{166}(u_b + v_a)(u_a + v_b) \\
&\quad + \frac{1}{4}C_{456}(v_c + w_b)(u_c + w_a) \\
T_{22} &= C_{11}\left[v_b + \frac{1}{2}(u_b^2 + 3v_b^2 + w_b^2)\right] \\
&\quad + C_{12}\left[u_a + w_c + v_b(u_a + w_c)\right] + \frac{1}{2}(u_a^2 + v_a^2 + w_a^2 + u_c^2 + v_c^2 + w_c^2) \\
&\quad + C_{44}\left[v_a^2 + v_c^2 + v_c w_b + v_a u_b\right] + 3C_{111}v_b^2 + C_{112}\left[u_a^2 + w_c^2 + 2v_b(u_a + w_c)\right] \\
&\quad + \frac{1}{4}C_{144}(w_a + u_c)^2 + \frac{1}{4}C_{166}\left[(v_c + w_b)^2 + (v_a + u_b)^2\right] + C_{123}w_c u_a
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
T_{23} &= C_{11}v_c w_c + C_{12}v_c(v_b+u_a) + C_{44}[v_c+w_b \\
&\quad + v_b(2v_c+w_b) + w_b w_c + u_c(v_a+u_b) + v_a w_a] \\
&\quad + \frac{1}{2}C_{144}u_a(v_c+w_b) + \frac{1}{2}C_{166}(v_b+w_c)(v_c+w_b) \\
&\quad + \frac{1}{4}C_{456}(v_a+u_b)(w_a+u_c) \\
T_{31} &= C_{11}w_a u_a + C_{12}w_a(w_c+v_b) + C_{44}[w_a+u_c \\
&\quad + w_c(2w_a+u_c) + u_c u_a + v_a(w_b+v_c) + w_b u_b \\
&\quad + \frac{1}{2}C_{144}v_b(w_a+u_c) + \frac{1}{2}C_{166}(w_c+u_a)(w_a+u_c) \\
&\quad + \frac{1}{4}C_{456}(w_b+v_c)(u_b+v_a) \\
T_{32} &= C_{11}w_b v_b + C_{12}w_b(w_c+u_a) + C_{44}[v_c+w_b+v_b v_c \\
&\quad + w_c(2w_b+v_c) + u_b u_c + w_a(v_a+u_b) \\
&\quad + \frac{1}{2}C_{144}u_a(v_c+w_b) + \frac{1}{2}C_{166}(v_c+w_b)(v_b+w_c) \\
&\quad + \frac{1}{4}C_{456}(w_a+u_c)(v_a+u_b) \\
T_{33} &= C_{11}\left[w_c + \frac{1}{2}\left(u_c^2+v_c^2+3w_c^2\right)\right] \\
&\quad + C_{12}\left[v_b+u_a+w_c(v_b+u_a)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\left(u_b^2+v_b^2+w_b^2+u_a^2+v_a^2+w_a^2\right)\right] \\
&\quad + C_{44}[w_b^2+w_c^2+w_a u_c+w_b v_c] + 3C_{111}w_c^2 \\
&\quad + C_{112}[v_b^2+u_a^2+2w_c(v_b+u_a)] + \frac{1}{4}C_{144}(u_b+v_a)^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}C_{166}[(w_a+u_c)^2+(w_b+v_c)^2] + C_{123}u_a v_b
\end{aligned}\right\} \tag{17.12.1}
$$

将上式代入(17.6.1)式便可得到运动方程，将第一个方程写在下面：

$$\left.\begin{aligned}
\rho_0 u = {} & C_{11}u_{aa} + C_{12}(v_{ab} + w_{ac}) \\
& + C_{44}(u_{bb} + u_{cc} + v_{ab} + w_{ac}) \\
& + C_{11}[3u_a u_{aa} + v_b u_{bb} + w_c u_{cc} \\
& + v_a v_{aa} + u_b v_{bb} + w_a w_{aa} + u_c w_{cc}] \\
& + C_{12}[(v_b + w_c)u_{aa} + (u_a + w_c)u_{bb} \\
& + (u_a + v_b)u_{cc} + 2u_b u_{ab} + 2u_c u_{ac} \\
& + (u_a + v_b)v_{ab} + v_c v_{ac} + u_c v_{bc} \\
& + w_b w_{ab} + (u_a + w_c)w_{ac} + u_b w_{bc}] \\
& + C_{44}[2u_a(u_{bb} + u_{cc}) + 2(2u_b + v_a)u_{ab} \\
& + 2(2u_c + w_a)u_{ac} + 2(v_c + w_b)u_{bc} \\
& + u_b v_{aa} + v_a v_{bb} + (v_a + u_b)v_{cc} \\
& + (u_c + v_b)v_{ab} + v_c v_{ac} + u_c v_{bc} \\
& + u_c w_{aa} + (u_c + w_a)w_{bb} + w_a w_{cc} \\
& + w_b w_{ab} + (u_a + w_c)w_{ac} + u_b w_{bc}] \\
& + 6C_{111}u_a u_{aa} + 2C_{112}[(v_b + w_c)u_{aa} \\
& + (u_a + v_b)v_{ab} + (u_a + w_c)w_{ac}] \\
& + \frac{1}{2}C_{144}[w_c u_{bb} + v_b u_{cc} + w_c v_{ab} \\
& + (w_b + v_c)v_{ac} + (u_c + w_a)v_{bc} \\
& + (v_c + w_b)w_{ab} + v_b w_{ac} \\
& + (u_b + v_a)w_{bc}] \\
& + \frac{1}{2}C_{166}[(u_a + v_b)u_{bb} + (u_a + w_c)u_{cc} \\
& + 2(u_b + v_a)u_{ab} + 2(u_c + w_a)u_{ac} \\
& + (u_b + v_a)(v_{aa} + v_{bb}) + (u_a + v_b)v_{ab} \\
& + (u_c + w_a)(w_{aa} + w_{cc}) \\
& + (u_a + w_c)w_{ac}] + C_{123}(w_c v_{ab} + v_b w_{ac}) \\
& + \frac{1}{4}C_{456}[2(v_c + w_b)u_{bc} + (v_a + u_b)v_{cc} \\
& + (v_c + w_b)v_{ac} + (u_c + w_a)(v_{bc} + w_{bb}) \\
& + (v_c + w_b)w_{ab} + (u_b + v_a)w_{bc}]
\end{aligned}\right\} \tag{17.12.2}$$

应当注意的是，上式中的 ρ_0 只是弹性体在未产生形变时的介质密度，如要将它换成形变后的密度 ρ，必须利用

$$\rho = \frac{\rho_0}{|\boldsymbol{J}|} \approx \rho_0\left\{1 - (u_a + v_b + w_c)\right\}$$

将这个结果代入(17.12.2)式，准确到二阶项则有

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\frac{1}{|J|}\rho_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\&=(17.12.2)\text{式右端各项}\\&\quad-(u_a+v_b+w_c)\{C_{11}u_{aa}+C_{12}(v_{ab}+w_{ac})\\&\quad+C_{44}(u_{bb}+u_{cc}+v_{ab}+w_{ac})\}\end{aligned}\tag{17.12.3}$$

由此可见，在运动方程中将惯性项中的ρ_0换成ρ时，方程(17.12.2)中与三阶常数有关的项保持不变，而附加上式右端的后面三项只与二阶常数有关，这样的结果只在准确到二阶项的条件下成立。完全类似，关于第二、第三个运动方程我们可以类推得到，只不过按$u\to v\to w$，$a\to b\to c$的递推关系即可，为节省篇幅，不再列出。这里只有3个方程，但三阶常数就有6个，要想将它们逐个测量出来，还要寻求其他方法，下面简略介绍前面讨论过的加静压力P的方法。

(1)沿晶体的[100]方向有小振幅形变的纵波传播，这时，位移分量可表示为

$$\left.\begin{aligned}u=\alpha a+Ae^{\mathrm{j}[\omega t-(1+\alpha)ka]}\\v=ab,\quad w=\alpha c\end{aligned}\right\}\tag{17.12.4}$$

与17.5节中相同，首先可以算得

$$\alpha=-\frac{P}{C_{11}+2C_{12}}$$

将这些结果代入(17.12.3)式，仍忽略α的二阶和二阶以上的项，最终得到

$$\rho V^2=C_{11}-P\left[\frac{C_{11}+2C_{12}}{2C_{11}+2C_{12}+6C_{111}+4C_{112}}\right]^{-1}\tag{17.12.5}$$

式中V是该变形物体中的波速。

(2)在[010]方向传播横波，质点位移沿[100]方向，其位移分量可表示为

$$\left.\begin{aligned}u=\alpha a+e^{\mathrm{j}[\omega t-(1+\alpha)kb]}\\v=\alpha b,\quad w=\alpha c\\\rho V^2=C_{44}-P\left[\frac{C_{11}+2C_{12}+C_{44}+\frac{1}{2}C_{144}+C_{166}}{C_{11}+2C_{12}}\right]\end{aligned}\right\}\tag{17.12.6}$$

(3)在[110]方向传播横波，质点位移沿$[1\bar{1}1]$方向，在这种情况下，位移分量可表示为

$$\left.\begin{aligned} u&=\alpha a+\frac{A}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\{\omega t-(1+\alpha)k[(a+b)/\sqrt{2}]\}} \\ v&=\alpha b-\frac{A}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\{\omega t-(1+\alpha)k[(a+b)/\sqrt{2}]\}} \\ w&=\alpha c \end{aligned}\right\} \tag{17.12.7}$$

上面的式子是这样得到的，由于[110]方向与 a 轴和 b 轴的夹角都是 45°，考虑到静压力 P 产生的静位移为 $u_0=\alpha a,\ v_0=\alpha b,\ w_0=w=\alpha c$，故形变之后的有关点的坐标分别为 $(1+\alpha)a$ 和 $(1+\alpha)b$，故与此有关的相位因子成为

$$k\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)a(1+\alpha)+k\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)b(1+\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2}}k(a+b)(1+\alpha)$$

将(17.12.7)式代入(17.12.3)式，容易求得运动方程

$$\begin{aligned} \rho\ddot{u}=&C_{11}u_{aa}+C_{12}v_{ab}+C_{44}(u_{bb}+v_{ab}) \\ &+C_{11}[(2u_a-v_b-w_c)u_{aa}+v_bu_{bb} \\ &+v_av_{aa}+u_bv_{bb}]+C_{12}[(v_b+w_c)u_{aa} \\ &+(u_a+w_c)u_{bb}+2u_bu_{ab}-w_cv_{ab} \\ &+C_{44}[(u_a-v_b-w_c)u_{bb}+2(2u_b+v_a)u_{ab} \\ &+u_bv_{aa}+v_av_{bb}-w_cv_{ab}]+6C_{111}u_au_{aa} \\ &+2C_{112}[(v_b+w_c)u_{aa}+(u_a+v_b)v_{ab}] \\ &+\frac{1}{2}C_{144}(w_cu_{bb}+w_cv_{ab}) \\ &+\frac{1}{2}C_{166}[(u_a+v_b)u_{bb}+2(u_b+v_a)u_{ab} \\ &+(u_b+v_a)(v_{aa}+v_{bb})+(u_a+v_b)v_{ab} \\ &+C_{123}w_cv_{ab} \end{aligned} \tag{17.12.8}$$

将(17.12.7)式代入(17.12.8)式，仍忽略 α 的二阶和二阶以上的项，定义波速为 $V=\omega/k$，于是得到

$$\rho V^2=\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})-P\frac{\frac{3}{2}(C_{11}+C_{12})+3C_{111}-\frac{1}{2}C_{123}}{C_{11}+2C_{12}} \tag{17.12.9}$$

类似地，可以处理其他情况，从而得到形如(17.12.5)式、(17.12.6)式和(17.12.9)式的式子，用来决定三阶弹性常数，本书不作讨论，读者可以按照上述方法一一推演出来。这样人们可以得到足够的关系，利用这些关系可以将弹性常数测量出来，其方法仍是改变静压力或者静应力，相应地测量波速，通过波速平方对静力的直线斜率可以得到弹性常数。

17.13　固体中有限振幅波在边界的反射[9, 13~19]

我们已经讨论了无限介质中的有限振幅波的传播情况，但在实际条件下，固体介质总是存在边界的，如任何一个待测样品，其尺寸总有一定的尺寸，而在实验中，用来测量样品的换能器也总贴在边界面上，这时测得的声场，应当是边界面的入射波和反射波等的贡献，因此，前面的理论还不足以描述和处理这类实际问题，有必要进一步讨论有界空间固体介质中的非线性声学。

正如在第 8 章中指出过，由于非线性波动理论中的各阶谐波之间有能量交换(不像在线性波动理论中它们是彼此独立的)，在边界问题的定解条件的提法上，特别是边界条件的提法上，存在一定的困难，加之在某些解中出现了随距离增长的积累解，给边界连接条件带来麻烦，因此，以微扰法为基础的非线性声学在边值问题上受到了挑战，在下面我们只是应用一阶场的结果来讨论二阶场方程的特解的表达式和性质，而且只限于半空间问题。

在线性弹性波理论中，通过坐标面的选取，人们将三维问题简化为二维的，在这种情况下，位移与势函数的关系为

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \end{aligned}\right\} \tag{17.13.1}$$

其中选坐标平面为 x 轴和 z 轴所构成的平面，并且认为所有的量与 y 无关。这时，方程组(17.6.14)和(17.6.15)成为

$$\left.\begin{aligned} F_1 - F_7 &= T_{33}^{(2)} - T_{11}^{(2)} = B_{31} \\ F_1 - F_4 &= T_{22}^{(2)} - T_{11}^{(2)} = B_{21} \\ F_3 - F_8 &= T_{31}^{(2)} + T_{13}^{(2)} = A_{31} \\ F_9 - F_5 &= T_{23}^{(2)} + T_{32}^{(2)} = A_{32} \\ F_6 - F_2 &= T_{21}^{(2)} + T_{12}^{(2)} = A_{21} \end{aligned}\right\} \tag{17.13.2}$$

以及

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial F_5}{\partial z} - \frac{\partial F_6}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial F_7}{\partial z} + \frac{\partial F_8}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{17.13.3}$$

在 17.6 节中曾经指出，(17.6.12)式中人为地引入了 9 个待定函数 $F_i\,(i = 1,2,\cdots,9)$,它们之间的关系服从(17.6.14)式和(17.6.15)式，共有 8 个关系式，不足以决定 9 个未知量，为此，我们可以任意地指定一个关系，亦即是指定第 9 个关系式才能使问题可解。在那里我们曾经指定 $F_8 = 0$，从而得到方程组(17.6.21)~(17.6.24)。但在二维情况下，通过对比(17.6.14)式与(17.13.3)式可知，F_2，F_4，F_9 三个未知量在微分关系式(17.13.3)中消失，这就使得它与(17.13.2)式的沟通关系减少，如果仍选取 $F_8 = 0$ 也未尝不可，但这样做不太方便。另外，既然这个新关系的指定是任意的，我们当然要选一个关系，便于处理实际问题，为此，我们在上述 3 个未知量选一个对我们方便的关系显然是有好处的，下面我们选

$$F_2 = 0 \tag{17.13.4}$$

将它代入到(17.13.2)式和(17.13.3)式中容易得到

$$F_6 = T_{21}^{(2)} + T_{12}^{(2)} = A_{21} \tag{17.13.5}$$

再通 F_6 与 F_5 的微分方程可以求出 F_5

$$F_5 = \frac{\partial}{\partial x}\int F_6 \mathrm{d}z = \frac{\partial}{\partial x}\int A_{21} \mathrm{d}z \tag{17.13.6}$$

从而 F_9 为已知；而 F_1 满足泊松方程，即 F_1 为已知，从而 F_4，F_7 因而 F_3 及 F_8 皆为已知，也就是说，全部未知函数都可以得到解答。此外，在二维及平面振动的

情况下，振动面是 x, z 面，从(17.6.4)式容易得出

$$\overline{T}_{12}^{(2)} = \overline{T}_{21}^{(2)} = \overline{T}_{32}^{(2)} = \overline{T}_{23}^{(2)} = 0,\ A_{21} = A_{32} = 0$$

这样，波动方程组可表示为

$$\left.\begin{aligned} \Box^2 \varphi &= \overline{F}_1 + \overline{T}_{11}^{(2)} \\ \Box_s^2 \psi_1 &= 0 \\ \Box_s^2 \psi_2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int \overline{F}_1 \mathrm{d}z - \overline{T}_{13}^{(2)} \\ \Box_s^2 \psi_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{17.13.7}$$

$T_{11}^{(2)}$ 由(17.6.4)式决定，F_1 满足泊松方程由(17.6.16)~(17.6.18)(三维问题)或(17.6.25)(二维问题)决定，其中

$$\rho_D = \frac{\partial^2 A_{13}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 B_{31}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 [T_{13}^{(2)} + T_{31}^{(2)}]}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 [T_{33}^{(2)} - T_{11}^{(2)}]}{\partial z^2} \tag{17.13.8}$$

式中，$T_{ij}^{(2)}$ 可由(17.6.4)式求出，A_{13}=A_{31} 和 B_{31} 由(17.6.15)决定。为了在平面半空间求解满足泊松方程的 F_1，我们应用格林函数方法，即取

$$G(\xi, \zeta | x, z) = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}{(\xi - x)^2 + (\zeta + z)^2} \tag{17.13.9}$$

将它代入(17.6.25)式得到

$$\overline{F}_1 = -L^{(S)}(\overline{F}_1) - L^{(V)}(\overline{\rho}_D) \tag{17.13.10}$$

式中

$$L^{(V)}(\overline{\rho}_D) = \iint G(\xi, \zeta | x, z) \overline{\rho}_D \mathrm{d}s \tag{17.13.11}$$

$$L^{(S)}(\overline{F}_1) = \oint \overline{F}_1(\xi, 0) \frac{\partial}{\partial n} G(\xi, \zeta | x, z) \Big|_{\zeta=0} \mathrm{d}\xi \tag{17.13.12}$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\zeta=0} = \mp \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{2z}{(\xi - x)^2 + z^2} \right\} \tag{17.13.13}$$

$\mp$ 的选取规则如下，如 z 的正方向与积分区表面外法线的方向相同，则取负号，反之取正号。这些结果表明，算子 $L^{(V)}(\overline{\rho}_D)$ 和 $L^{(S)}(\overline{F}_1)$ 的意义是：在三维情况下分别

表示体积分和包含该体积的边界面积分；而在在二维情况下分别表示面积分和包围该面积的边界围线积分。将 $\overline{F}_1$ 及相应的 $T_{ij}^{(2)}$ 代入(17.13.7)式就能求出 φ 和 ψ_2。

现在我们来研究算子 $L^{(V)}(\overline{\rho}_D)$ 和 $L^{(S)}(\overline{F}_1)$ 的性质。由(17.13.10)式~(17.13.13)式可知

$$L^{(S)}(\overline{F}_1)+\overline{F}_1=-\iint G(\xi,\zeta|x,z)\overline{\rho}_D\mathrm{d}S \tag{17.13.10a}$$

是一个非齐次积分方程，后面将证明，$\overline{\rho}_D$ 和 $\overline{F}_1$ 的形式都是体波或面波(在二级近似下，它们是二次谐波)，故我们下面将作一般性的讨论。如果有一个体波

$$f_b=F_b\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}(k_x x-Kz)} \tag{17.13.14}$$

则

$$\begin{aligned}L^{(S)}(f_b)&=\mp\frac{F_b}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2z}{(\xi-x)^2+z^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_x\xi}\mathrm{d}\xi\\&=\mp\frac{F_b}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2z}{\xi^2+z^2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_x(x+\xi)}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

由复变积分的留数理论可得

$$L^{(S)}(f_b)=-F_b\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_x x-2k_x z}$$

另外，如果是一个表面波

$$f_s=F_s\mathrm{e}^{-2\alpha|z|-2\mathrm{j}k_x x}$$

用同样的方法可以得到

$$L^{(S)}(f_s)=-F_s\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_x x-2k_x z}$$

由此可见，算子 $L^{(S)}(X)$ 总是将体波或面波变换成表面波，变换后的表面波的性质仅与波数 k_x 有关，现在我们来研究算子 $L^{(V)}(X)$。显然，

$$\begin{aligned}L^{(V)}(f_b)&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\ln\frac{r_-}{r_+}f_b(\xi,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}[\ln r_+-\ln r_-]f_b(\xi,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta\end{aligned} \tag{17.13.15}$$

式中

$$r_{\pm}^2=(\xi-x)^2+(\zeta\pm z)^2$$

在与被积函数$\ln r_{\pm}$的积分中作坐标变换，$\xi'-x=\xi$，$\zeta'\pm z=\zeta$ 于是有

$$L^{(V)}(f_b)=\frac{F_b}{4\pi}\{I_1(k_x,K,z)e^{-2jKz}-I_1(k_x,K,-z)e^{2jKz}\}e^{-2jk_x x} \tag{17.13.16}$$

式中

$$\begin{aligned}I_1(k_x,K,z)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{z}^{\infty}\ln(\xi^2+\zeta^2)e^{-2jk_x\xi+2jK\zeta}d\xi d\zeta\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2jK\zeta}\int_{z}^{\infty}\ln(\xi^2+\zeta^2)e^{-2jk_x\xi}d\xi d\zeta\end{aligned} \tag{17.13.17}$$

$$\begin{aligned}I_1(k_x,K,-z)&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2jK\zeta}\int_{-z}^{\infty}\ln(\xi^2+\zeta^2)e^{-2jk_x\xi}d\xi d\zeta\\&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2jK\zeta}\left(\int_{-z}^{0}+\int_{0}^{\infty}\right)\ln(\xi^2+\zeta^2)e^{-2jk_x\xi}d\xi d\zeta\end{aligned} \tag{17.13.18}$$

显然

$$L^{(V)}(f_b)\big|_{z=0}=0 \tag{17.13.19}$$

现在我们用留数定理来计算(17.13.17)式的积分。显然，被积函数的支点是$\xi=\pm j\zeta$和$\xi=\pm j\infty$，选取两条支线：$(j\infty, j\zeta)$，$(-j\infty,-j\zeta)$。如$\zeta>0$，积分路线$(-j\infty,-j|\zeta|)$取在下半平面围绕支点$-j|\zeta|$，于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ln(\xi^2+\zeta^2)e^{-2jk_x\xi}d\xi=-\frac{\pi}{k_x}e^{-2k_x|\zeta|} \tag{17.13.20}$$

如果$\zeta<0$，积分路线$(-j\infty, j\zeta)=(-j\infty,-j|\zeta|)$ 取在下半平面围绕支点$-j|\zeta|$，于是有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\ln(\xi^2+\zeta^2)e^{-2jk_x\xi}d\xi=-\frac{\pi}{k_x}e^{-2k_x|\zeta|} \tag{17.13.21}$$

将这两个式子代入(17.13.17)式，设 $z>0$，于是有

$$I_1(k_x,K,z)=-\frac{\pi}{k_x}\int_{z}^{\infty}e^{-2(k_x-jK)|\zeta|}d\zeta=-\frac{\pi}{2k_x(k_x-jK)}e^{-2(k_x-jK)z} \tag{17.13.22}$$

现在计算(17.13.16)式中大括号中的第二项，即(17.13.18)式。注意在区间$(-z, 0)$对ζ积分是属于$\zeta < 0$的情况，用同样的方法可以算出

$$I_1(k_x, K, -z) = -\frac{\pi}{2k_x(k_x + jK)}[1 - e^{-2(k_x + jK)z}] - \frac{\pi}{2k_x(k_x - jK)} \tag{17.13.23}$$

将(17.13.22)式和(17.13.23)式代入(17.13.16)式得到

$$\left.\begin{aligned} L^{(V)}(f_b) &= \frac{F_b}{4K_0^2}(e^{2jKz} - e^{-2k_x z})e^{-2jk_x x} \\ z > 0, &\quad K_0^2 = K^2 + k_x^2 \end{aligned}\right\} \tag{17.13.24}$$

如果$z<0$，对应的解可写为

$$L^{(V)}(f_b) = -\frac{F_b}{4K_0^2}(e^{2jKz} - e^{2k_x z})e^{-2jk_x x}, \quad z < 0 \tag{17.13.25}$$

上式的括号内的第一项是体波，第二项是面波。显然，当$f_b = F_b e^{-2jk_x x - 2jkz}$时，只要在(17.13.24)式和(17.13.25)式中取$K = -K$即可。这些结果表明，算子$L^{(V)}(X)$将一个体波变换成一个体波和一个面波，或

$$L^{(V)}(f_b) = L_v^{(V)}(f_b) + L_s^{(V)}(f_b) \tag{17.13.26}$$

将此式代入(17.13.7)式，表示

$$\varphi^{(2)} = \varphi_b^{(2)} + \varphi_s^{(2)} + \varphi_{bs}^{(2)} \tag{17.13.27}$$

这里和以后我们将二阶势φ以及ψ_2分别用$\phi^{(2)}$和$\psi_2^{(2)}$表示。令

$$\Box^2 \phi_b^{(2)} - \bar{T}_{11b}^{(2)} = -L_v^{(V)}(\bar{\rho}_D) \tag{17.13.28}$$

$$\Box^2 \phi_{bs}^{(2)} - \bar{T}_{11s}^{(2)} = -L_s^{(V)}(\bar{\rho}_D) \tag{17.13.29}$$

从这两个式子可得

$$\Box^2 \phi_s^{(2)} = -L^{(S)}(\bar{F}_1) \tag{17.13.30}$$

现在我们来证明上一个式子可以写成

$$\Box^2 \phi_s^{(2)} + L^{(S)}(\Box^2 \phi_s^{(2)}) = 0 \tag{17.13.31}$$

由(17.13.10)式可知

$$L^{(S)}(\overline{F}_1) = -\overline{F}_1 - L^{(V)}(\overline{\rho}_D)$$

将它代入(17.13.31)式之后再对它进行 $L^{(S)}(\bullet)$ 运算得到

$$\Box^2 \phi_s^{(2)} = -L^{(S)}(\overline{F}_1) = \overline{F}_1 + L^{(V)}(\overline{\rho}_D)$$

$$L^{(S)}(\overline{F}_1) = L^{(S)}(\Box^2 \phi_s^{(2)}) - L^{(S)}\{L^{(V)}(\overline{\rho}_D)\}$$

将(17.13.26)式代入(17.13.12)式，很易证明

$$L^{(S)}\{L^{(V)}(\overline{\rho}_D)\} = 0$$

将这些结果代入(17.13.31)式，便可得到

$$\Box^2 \phi_s^{(2)} + L^{(S)}(\Box^2 \phi_s^{(2)}) = 0$$

用同样的方法，令

$$\psi_2^{(2)} = \psi_{2b}^{(2)} + \psi_{2s}^{(2)} + \psi_{2bs}^{(2)}, \quad \overline{T}_{ij}^{(2)} = \overline{T}_{ijv}^{(2)} + \overline{T}_{ijs}^{(2)} \tag{17.13.32}$$

将这个式子和(17.13.10)式代入(17.13.7)式，取

$$\Box_s^2 \psi_{2b}^{(2)} + \overline{T}_{13v}^{(2)} = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int L_v^{(V)}(\overline{\rho}_D) \mathrm{d}z \tag{17.13.33}$$

$$\Box_s^2 \psi_{2bs}^{(2)} + \overline{T}_{13s}^{(2)} = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int L_s^{(V)}(\overline{\rho}_D) \mathrm{d}z \tag{17.13.34}$$

可以类似地得到

$$\Box_s^2 \psi_{2s}^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x} \int \Box^2 \phi_s^{(2)} \mathrm{d}z \tag{17.13.35}$$

在平面半空间的一侧入射一个平面体波，它会产生一个反射体波，也许还会产生一个面波，我们称其为一阶场，它们满足齐次波动方程和平面边界条件。由于介质的非线性，这些一阶场之间的相互作用产生谐波场，其中满足(17.13.28)式的二阶谐波属于纵体波，满足(17.13.29)式和(17.13.31)式的二阶谐波部分属于纵面波；而满足(17.13.33)式的二阶谐波部分属于横体波，满足(17.13.34)式和(17.13.35)式的二阶谐波部分属于横面波。其中 $\overline{T}_{ij}^{(2)}$ 和 $\overline{\rho}_D$ 可以通过(17.6.4)式和(17.6.17)式求得，可是 $\overline{F}_1$ 至今没有给出具体形式，因为它是积分方程(17.13.10)式的解，在具体应用中将用微扰法给出，故在一般情况下，我们要解 6 个方程。但下面将可看到，体波激励的面波对位移没有贡献，因此，我们讨论体波入射时仅考虑二价体波，或者说体波源和面波源可以分开来处理。

17.14　平面半空间的二阶谐波

众所周知，在通常的情况下，一个振动源在弹性体中可以同时激励纵波和横波，或者说，一个任意的扰动总可以分解成一组纵(P)波和二组横(SV，SH)波的叠加。为了深入研究各种波的性质，下面我们将分别讨论体波(包括 P 波、SV 波及 SH 波)和面波的一阶入射波，从而分别讨论它们所激励起来的二阶体波及二阶面波的波谱。

由前面的结果可知，二阶场满足非齐次波动方程，其非齐次项(源项)依赖于一阶场，对一阶场进行算子运算，即可得到相应的非齐次项。从线性理论可知，当一列 P 波入射到平面半空间，能够产生反射 P 波和 SV 波，当条件满足能够产生表面波，因此，当一列 P 波入射到平面半空间之后，除了产生体波之外，还有可能出现面波。故一般说来，这时的一阶场中既有体波又有面波。另外，算子 $L^{(V)}(X)$ 将体波转换成一个体波和一个面波，而 $L^{(S)}(X)$ 将体波或面波转换成一个面波，由于两个算子是线性相加，以及二阶谐波波动方程的非齐次项也是线性相加，故我们可以将源项中的体波和面波源分开来讨论。

现在我们将从(17.13.28)式~(17.13.31)式以及(17.13.33)式和(17.13.35)式出发，假设一阶场的反射满足通常线性波动理论，将一阶场作为它们右端的激励源，从而在平面半空间求解二阶场的边值问题。当然，半空间问题只有一个边界平面，而通常的有限尺寸的固体是多界面的，如六面体有 6 个界面，但前者的研究方法和结果总可以作为后者的基础并可以借鉴。

在下面具体计算中，将波写成复数形式，最终结果的处理参见第 14.5 节。

1. P 波入射到半空间所产生的二阶谐波[15]

将拉格朗日坐标变量 a, b 和 c 用 x, y 和 z 代替，在二维情况下只有 x 和 z 两个坐标。当入射波为 P 波时，它可写为

$$\phi_{\mathrm{P}}^{(1)} = A_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_x x + k_z z)}$$

它在同一介质中产生两个反射波，一个是 P 波

$$\phi_{\mathrm{r}}^{(1)} = B_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_x x - k_z z)}$$

另一个是 SV 波

$$\psi_{\mathrm{r}}^{(1)} = B_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_x x - K_z z)}$$

式中，上标(1)表示是一阶场(下同)，ω 为入射波的角频率，k_x, k_z 为 P 波波数在 x, z 方向的分量，K_z 为横波在 z 方向的波数分量。为了书写方便，我们引入如下的省

略符号：

$$\left.\begin{aligned}\phi_{\mathrm{P}}^{(1)} &= A_0^+ \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\ \phi_{\mathrm{r}}^{(1)} &= B_0^- \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\ \psi_{\mathrm{r}}^{(1)} &= B_2^- \,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\end{aligned}\right\} \tag{17.14.1}$$

由于振动仅发生在 x, z 面上，故 $v=0$，所有量与 y 无关。由(17.6.7)式求出 u, w。根据(17.6.5)式~(17.6.6)式可得

$$\left.\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{v} &= u_x + w_z\\ (\nabla\boldsymbol{v})^2 &= u_x^2 + u_z^2 + w_x^2 + w_z^2\\ \left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right)^2 &= u_x^2 + w_x^2\\ \left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\right)^2 &= u_z^2 + w_z^2\\ H &= u_x w_z - \frac{1}{4}(u_z + w_x)^2\end{aligned}\right\} \tag{17.14.2}$$

再将所得结果代入(17.6.4)式中求出 $T_{ij}^{(2)}$

$$\left.\begin{aligned}T_{11}^{(2)} &= (\lambda+2\mu)[\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v})^2 + u_x\nabla\cdot\boldsymbol{v}\ ]\\ &\quad + \mu\left[-\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\right)^2 + u_z^2\right.\\ &\quad \left. + u_z w_x - 2u_x w_z\right] + (l+2m)(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2\\ &\quad - 2m[w_z\nabla\cdot\boldsymbol{v} + H]\\ T_{13}^{(2)} &= (\lambda+2\mu)u_z\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \mu[w_x w_z + u_x w_x]\\ &\quad + m(w_x + u_z)\nabla\cdot\boldsymbol{v}\\ &= \{(\lambda+2\mu)u_z + \mu w_x + m(w_x+u_z)\}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\\ T_{31}^{(2)} &= (\lambda+2\mu)w_x\nabla\cdot\boldsymbol{v} + \mu[u_z u_x + w_z u_z]\\ &\quad + m(w_x+u_z)\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \{(\lambda+2\mu)w_x +\\ &\quad \mu u_z + m(w_x+u_z)\}\nabla\cdot\boldsymbol{v}\\ T_{33}^{(2)} &= (\lambda+2\mu)[\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{v})^2 + w_z\nabla\cdot\boldsymbol{v}]\\ &\quad + \mu\left[-\left(\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\right)^2 + w_x^2 + w_x u_z - 2w_z u_x\right]\\ &\quad + (l+2m)(\nabla\cdot\boldsymbol{v})^2\\ &\quad + 2m[-u_x\nabla\cdot\boldsymbol{v} - H]\end{aligned}\right\} \tag{17.14.3}$$

引入下述符号并计算位移及其他有关量

$$
\left.\begin{aligned}
\phi &= \phi_{\mathrm{P}}^{(1)} + \phi_{\mathrm{r}}^{(1)} = A_0^{+} + B_0^{-} \\
\psi &= \psi_2^{(1)} = B_2^{-} \\
u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\mathrm{j}k_x(A_0^{+} + B_0^{-}) + \mathrm{j}K_z B_2^{-} \\
w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = \mathrm{j}k_z(A_0^{+} - B_0^{-}) - \mathrm{j}k_x B_2^{-} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{v} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_z^2)(A_0^{+} + B_0^{-})
\end{aligned}\right\} \tag{17.14.4}
$$

将它们代入(17.6.15)式可得

$$
\begin{aligned}
B_{31} = T_{33}^{(2)} - T_{11}^{(2)} &= (\lambda + 3\mu + 2m)(w_z - u_x)\nabla \cdot \boldsymbol{v} \\
&= (\lambda + 3\mu + 2m)[k^2(k_z^2 - k_x^2)(A_0^{+} + B_0^{-})^2 \\
&\quad + 2k^2 k_x K_z (A_0^{+} + B_0^{-})B_2^{-}]
\end{aligned} \tag{17.14.5}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{13} = A_{31} = T_{13}^{(2)} + T_{31}^{(2)} &= (\lambda + 3\mu + 2m)(w_x + u_z)\nabla \cdot \boldsymbol{v} \\
&= -(\lambda + 3\mu + 2m)k^2[2k_x k_z (A_0^{+2} - B_0^{-2}) \\
&\quad + (K_z^2 - k_x^2)(A_0^{+} + B_0^{-})B_2^{-}]
\end{aligned} \tag{17.14.6}
$$

由这两个式子可见，由于 A_{13} 和 B_{31} 都正比于 $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$，因此，横波对 ρ_D (见下面的式子)没有贡献。将(17.14.5)式和(17.14.6)式代入(17.13.8)式得到

$$
\begin{aligned}
\rho_D &= \frac{\partial^2 A_{13}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 B_{31}}{\partial z^2} \\
&= -2k^2(\lambda + 3\mu + 2m)\{4k^2 k_z^2 (A_0^{+2} + B_0^{-2}) \\
&\quad + \beta_1 A_0^{+} B_2^{-} + \beta_2 B_0^{-} B_2^{-}\}
\end{aligned} \tag{17.14.7}
$$

式中，$A_0^{+2} = (A_0^{+})^2$，依次类推。将它们代入(17.13.28)式和(17.13.33)式所描述的体波方程，首先计算 $\overline{T}_{11b}^{(2)}$、$L_v^{(V)}(\overline{\rho}_D)$ 和 $\overline{T}_{13b}^{(2)}$，由于项数太多且繁，需要估计其贡献。(17.13.28)式表示的是二阶体纵波的非齐次波动方程，如果非齐次项是简谐正弦波，则有

$$
\Box^2 \phi_b = -\nabla^2 \phi_b - 4k^2 \phi_b = -L_v^{(V)}(\overline{\rho}_D) + \overline{T}_{11b}^{(2)} \tag{17.14.8}
$$

由 7.5 节内容可知，二阶谐波的非齐次波动方程的积累解是占优势的项，因此可以认为，故在(17.14.8)式右端的非齐次项中，仅是 A_0^{+2}，B_0^{-2} 的项有积累解而予以保留，其他非齐次项(如与 β_1 和 β_2 有关的项)没有积累解而予以舍弃，其理由如下：如果波数是 k，声波的吸收系数为 α，通常有 $k \gg \alpha$，于是有 $kz \gg \alpha z$，如果 $\alpha z<1$，表明由于声吸收波的振幅减弱 $e^{-\alpha z} < e^{-1}$ 倍，而相应的二阶谐波积累解的贡献却是 $kz \gg 1$ 倍，由此可见，积累解是非齐次解中的最占优势的成分。按照这个原则，从(17.13.24)式可以算得体波部分为

$$L_v^{(V)}(\bar{\rho}_D) = -\alpha_0(A_0^{+2} + B_0^{-2}) + \alpha_3 A_0^+ B_2^- + \alpha_4 B_0^- B_2^- \tag{17.14.9}$$

$$\alpha_0 = 2\frac{\lambda+3\mu+2m}{\lambda+2\mu}k^2 k_z^2 \tag{17.14.10}$$

(17.14.9)式右端的后两项对纵横波皆无积累，而予以舍弃。同样可以算得

$$\left.\begin{aligned}
\bar{T}_{11b}^{(2)} &= \bar{T}_{11}^{(2)} = \alpha_1 A_0^{+2} + \alpha_2 B_0^{-2} \\
\alpha_1 &= \left[\frac{1}{2}k^2 + k_x^2 - \frac{\mu k_z^2 - l k^2 - 2m k_x^2}{\lambda+2\mu}\right]k^2 \\
\alpha_2 &= \left[\frac{1}{2}k^4 + k_x^2(k_x^2 - k_z^2)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu k_z^2(k_z^2 - k_x^2) + (l+2m)(k^4 - 4k_x^2 k_z^2) - 2m k_z^2(k_z^2 - 2k_x^2)}{\lambda+2\mu}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{17.14.11}$$

代入(17.14.8)式，于是有

$$\Box^2 \phi_b = (\alpha_0 + \alpha_2)\ A_0^{+2} + (\alpha_0 + \alpha_2)\ B_0^{-2} \tag{17.14.12}$$

现在解(17.13.33)式。显然，$\bar{T}_{13b}^{(2)}$，$\bar{T}_{13}^{(2)}$ 正比于 $\nabla\cdot\boldsymbol{v}$，故它们不包含 B_2^{-2} 的项，因此，(17.13.33)式中没有与 B_2^{-2} 有关的项，即 $L_v^{(V)}(\bar{\rho}_D)$ 中也不包含 B_2^{-2} 的项，故(17.13.33)式成为

$$\Box_s^2 \psi_{2b} = 0 \tag{17.14.13}$$

ψ_{2b} 没有积累解。现在来求解(17.14.12)式。由第 7 章的积累解的讨论可知，当非齐次项为 $Ae^{-2jk_x x \pm 2jKz}$ 时，积累解为

$$f_{ac} = \pm\frac{A}{4jK} z e^{-2jk_x x \pm 2jKz} \tag{17.14.14}$$

根据这个结果，(14.17.12)式所对应的体纵波的积累解为

$$\phi_b^{(2)} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{4\mathrm{j}k_z} z\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_x x + 2\mathrm{j}k_z z} - \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{4\mathrm{j}k_z} z\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_x x - 2\mathrm{j}k_z z} \tag{17.14.15}$$

由(17.14.4)式可得二阶位移的积累部分为

$$\begin{aligned} u^{(2)}(x,z) = &-\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\frac{k_x}{k_z} z\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_x x + 2\mathrm{j}k_z z} \\ &+ \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{2}\frac{k_x}{k_z} z\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_x x - 2\mathrm{j}k_z z} \end{aligned} \tag{17.14.16}$$

$$\begin{aligned} w^{(2)}(x,z) = &\frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} z\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_x x + 2\mathrm{j}k_z z} \\ &+ \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{2} z\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_x x - 2\mathrm{j}k_z z} \end{aligned} \tag{17.14.17}$$

由此可见，二阶反射场的位移随着离开反射面的距离增长。

2. SV 波入射[16,20,21]

这时的一阶场除了入射的 SV 波以外，还有反射 SV 波和反射 P 波，即

$$\left.\begin{aligned} \psi_2^{(1)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}[A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x + \mathrm{j}K_z z} + B_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_x x - \mathrm{j}K_z z}] = A_2^+ + B_2^- \\ \phi_1^{(1)} = B_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - k_x x - k_z z)} = B_0^- \end{aligned}\right\} \tag{17.14.18}$$

$$\left.\begin{aligned} \phi = \phi_\mathrm{r}^{(1)} = B_0^-, \quad \psi = \psi_2^{(1)} = A_2^+ + B_2^- \\ u = \frac{\partial\phi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z} = -\mathrm{j}k_x B_0^- + \mathrm{j}K_z(A_2^+ - B_2^-) \\ w = \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\mathrm{j}k_z B_0^- - \mathrm{j}k_x(A_2^+ + B_2^-) \\ \nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -k^2 B_0^- \end{aligned}\right\}$$

按照(17.14.5)式和(17.14.6)式对应的量如下：

$$B_{31} = T_{33}^{(2)} - T_{11}^{(2)} = (\lambda + 3\mu + 2m)(w_z - u_x)\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

$$A_{13} = A_{31} = T_{13}^{(2)} + T_{31}^{(2)} = (\lambda + 3\mu + 2m)(w_x + u_z)\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

可以算出

$$\begin{aligned} T_{11}^{(2)} &= \frac{\lambda + 2\mu + m}{2}(k_x^2 + K_z^2)^2(A_2^{+2} + B_2^{-2}) + \beta_q A_2^+ B_2^- \\ \rho_D &= 4k^2 k_z^2 \beta_0 B_0^{-2} + \beta_3 A_2^+ B_0^- + \beta_4 B_0^- B_2^- \end{aligned} \tag{17.14.19}$$

$$L_v^{(V)}(\bar{\rho}_D)=\bar{\beta}_0 k_z^2 B_0^{-2}+\text{非积累项}$$

β_i,β_q是常数，它们与λ,μ,l,m有关。通过计算可知，当入射角不等于临界角时，$\bar{T}_{11}^{(2)}$中没有积累成分，故只是$L_v^{(V)}(\bar{\rho}_D)$中的反射纵波有积累解，即

$$\phi^{(2)}=\phi_r^{(2)}=\frac{\bar{\beta}_0 B_0^2}{4\mathrm{j}k_z^2}(k_z z)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}(k_x x-k_z z)}$$

相应位移的积累部分为

$$\begin{aligned}u^{(2)}&=\frac{\partial\phi_r^{(2)}}{\partial x}=-\frac{\bar{\beta}_0 B_0^2 k_x}{2k_z^2}(k_z z)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}(k_x x-k_z z)}\\ w^{(2)}&=\frac{\partial\phi_r^{(2)}}{\partial z}=\frac{\bar{\beta}_0 B_0^2 k_z}{2k_z^2}(k_z z)\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}(k_x x-k_z z)}\\ \bar{\beta}_0&=\frac{\beta_0}{\lambda+2\mu}\end{aligned}\tag{17.14.20}$$

β_0和β_Q表达式的计算留给读者。当入射角等于临界角时，除了反射纵波沿x方向有积累以外，Q 波沿x方向也有积累[20,21]，其全部积累解为

$$\phi_b^{(2)}=\frac{\bar{\beta}_0 B_0^2+\beta_q A_2 B_2}{4\mathrm{j}k}x\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}kx}$$

文献[21]的作者观察到了临界角的响应。这个结果表明，通过一个 SV 波（临界角入射）激励之后，接收二阶反射纵波和 Q 波[20,21]的位移，可以得到β_0以及β_Q的测量值，假设材料的两个拉密常数为已知，这样就可以测出材料的三阶常数l和m。

3. SH 波入射[16,20]

由前面的结果可知，当激励波为 P 波或 SV 波，波长的表达式中只包含两个三阶常数l和m但不包含n，因此，需要讨论 SH 波激励的情况。由于入射波的坐标平面是(x,z)面，故 SH 波的振动是沿y方向,即$u=w=0$以及

$$v=\frac{\partial\psi_3}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial z}$$

此时的一阶场为

$$\left.\begin{aligned}\psi_1^{(1)}&=B_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_x x+K_z z)}+B_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k_x x-K_z z)}=B_1^+ +B_2^-\\ \psi_3^{(1)}&=\frac{k_x}{K_z}(B_1^+ -B_2^-)\end{aligned}\right\}\tag{17.14.21}$$

它们满足$\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}^{(1)}=0$。通过计算可得

$$\left.\begin{aligned} v=-\mathrm{j}\frac{k^2}{K_z}(B_1^+-B_2^-),\quad v_x&=-\frac{k_xk^2}{K_z}(B_1^+-B_2^-)\\ v_z&=k^2(B_1^++B_2^-)\end{aligned}\right\}$$

$$A_{13}=\left(\mu+\frac{n}{4}\right)v_xv_z,\quad B_{31}=\left(\mu+\frac{n}{4}\right)(v_x^2+v_z^2)$$

$$\rho_D=(4\mu+n)K_z^2k^6(B_1^{+2}+B_2^{-2})$$

$$L_v^{(V)}(\bar{\rho}_D)=\frac{4\mu+n}{4(\lambda+2\mu)}K_z^2k^4(B_1^{+2}+B_2^{-2})$$

$$T_{11}^{(2)}=\frac{1}{2}(\lambda+2\mu+m)(v_x^2+v_z^2)-\left(\frac{n}{4}+\mu\right)v_z^2$$

将这些结果代入(17.14.8)式得到

$$\left.\begin{aligned}\Box^2\phi_b^{(2)}&=-\nabla^2\phi_b^{(2)}-4k^2\phi_b^{(2)}=-L_v^{(V)}(\bar{\rho}_D)+\bar{T}_{11b}^{(2)}\\&=\alpha_4(B_1^{+2}+B_2^{-2})+\alpha_5B_1^+B_2^-\\ \alpha_4&=\frac{K^4}{\lambda+2\mu}\left[\frac{1}{2}(\lambda+2\mu+m)\frac{K^2}{K_z^2}-\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\right]\\ \alpha_5&=\frac{K^4}{\lambda+2\mu}\left[-(\lambda+2\mu+m)\frac{k_x^2-K_z^2}{K_z^2}-2\left(\mu+\frac{n}{4}\right)\right]\end{aligned}\right\}$$

由此可以得到波动方程的解为

$$\phi_b^{(2)}=\frac{\alpha_4}{k^2-K^2}(B_1^{+2}+B_2^{-2})+\frac{\alpha_5}{k^2-k_x^2}B_1^+B_2^-$$

即 SH 波入射时所产生的二阶纵体波，当入射角 ϑ 小于临界角 ϑ_c 时，没有积累解，上式右端第二项为 Q 波。但当 $\vartheta=\vartheta_c$ 时，Q 波有积累[20]，这时

$$\phi_b^{(2)}(Q)=\frac{\alpha_5B_1B_2}{4\mathrm{j}k}x\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}kx}$$

这个结果表明，仅当 SH 波入射时，所得到的解中才包含第三个三阶常数 n。当入射角等于临界角时，沿 x 方向有积累解。

17.15　二阶谐表面波[13, 14]

线性表面波原理已广泛应用于表面波器件制造，非线性表面波理论也已经逐步应用于工程方面(如弹性卷积器等)，因此，下面将对二阶表面波理论进行讨论。

1.体波产生的表面波

从 17.14 节的结果可知，一个入射体波

$$f = f_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k_z z - k_x x + \omega t)} \tag{17.15.1}$$

它所产生的 ρ_D 是 n 个二阶谐体波的叠加，其中第 n 项的形式为

$$\rho_D^{(n)} = F_n \mathrm{e}^{2\mathrm{j}(\omega t - k_x x \pm k_z z)}, \quad \rho_D = \sum_n \rho_D^{(n)} \tag{17.15.2}$$

的形式，它们都可以产生一个体波源和一个表面波源，后者可以表示为

$$L_s^{(V)}(\overline{\rho}_D^{(n)}) = -\frac{F_n}{4K_0^2} \mathrm{e}^{-2k_x(|z| + \mathrm{j}x)} \tag{17.15.3}$$

将(17.15.3)式代入(17.13.29)式，由于 $T_{11s}^{(2)} = 0$，于是有

$$\square^2 \phi_{bs}^{(n)} = -L_s^{(V)}(\rho_D^{(n)}) = \frac{F_n}{4K_0^2} \mathrm{e}^{-2k_x(|z| + \mathrm{j}x)} \tag{17.15.4}$$

显然，可以将(17.15.4)式的解写成

$$\phi_{bs}^{(n)} = A_n \mathrm{e}^{-2k_x(|z| + \mathrm{j}x)} \tag{17.15.5}$$

代入(17.15.4)得到

$$A_n = \frac{F_n}{16k^2 K_0^2} \tag{17.15.6}$$

代入(17.13.34)式可得

$$\begin{aligned} \square_s^2 \psi_{2bs}^{(n)} &= \left[\nabla^2 + 4\frac{\omega^2}{C_t^2}\right] \psi_{2bs}^{(n)} = -\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \int L_s^{(V)}(\overline{\rho}_D^{(n)}) \mathrm{d}z \\ &= \mp \mathrm{j} \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{F_n}{4K_0^2} \mathrm{e}^{-2k_x(|z| + \mathrm{j}x)} \end{aligned} \tag{17.15.7}$$

用类似的方法很容易得到(17.15.7)式的解为

$$\psi_{2bs}^{(n)} = B_n \mathrm{e}^{-2k_x(|z| + \mathrm{j}x)} = \mp \mathrm{j} \phi_{bs}^{(n)} \tag{17.15.8}$$

将(17.15.5)式和(17.15.8)式代入位移公式

$$u_s=\frac{\partial\phi_{bs}^{(n)}}{\partial x}-\frac{\partial\psi_{2bs}^{(n)}}{\partial z},\quad w_s=\frac{\partial\phi_{bs}^{(n)}}{\partial z}+\frac{\partial\psi_{2bs}^{(n)}}{\partial x}\tag{17.15.9}$$

很容易得到$u_s=0,\ w_s=0$，即体波激励出来的面波对位移没有贡献。

2.面波产生的表面波[13, 14]

当一阶场是表面波，其表达式为

$$\left.\begin{aligned}&\phi_s^{(1)}=A\mathrm{e}^{-qz-\mathrm{j}k_x x},\quad \psi_{2s}^{(1)}=B\mathrm{e}^{-sz-\mathrm{j}k_x x}\\&q^2=k_x^2-k^2,\quad s^2=k_x^2-K^2\end{aligned}\right\}\tag{17.15.10}$$

式中，k 和 K 分别为纵波和横波波数。设 $z>0$，与前面相同，由(17.14.3)式可以算得$T_{11}^{(1)}$，$T_{33}^{(1)}$，$T_{13}^{(1)}$ 和$T_{31}^{(1)}$ 等量，进一步算得 $\bar{\rho}_D$ 和 $L_s^{(V)}(\bar{\rho}_D)$

$$L_s^{(V)}(\bar{\rho}_D)=\{\beta_{31}A^2[\mathrm{e}^{-2qz}-\mathrm{e}^{-2k_x z}]+\beta_{13}AB[\mathrm{e}^{-(q+s)z}-\mathrm{e}^{-2k_x z}]\}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_x x}\tag{17.15.11}$$

$T_{11}^{(1)}$ 和 $L_s^{(V)}(\bar{\rho}_D)$ 中包含积累项和非积累项，由于前者是主要贡献源，故下面我们只将积累源计入，于是与它们相对应的波动方程为

$$\Box^2\phi_s^{(2)}=\{\bar{T}_{11s}^{(2)}-L_s^{(V)}(\bar{\rho}_D)\}_{ac}=\beta_{3l}A^2\mathrm{e}^{-2qz-2\mathrm{j}k_x x}\tag{17.15.12}$$

$$\beta_{3l}=\left[\frac{3}{2}+\frac{l+2m}{\lambda+2\mu}\right]k^4\tag{17.15.13}$$

同理可以求解$\psi_{2s}^{(2)}$，但没有积累解，故不作计算。由此可以求出与积累解相对应的位移

$$\left.\begin{aligned}u_s^{(2)}&=\frac{\mathrm{j}k_x\beta_{3l}}{2q}A^2z\mathrm{e}^{-2qz+2\mathrm{j}(\omega t-k_x x)}\\w_s^{(2)}&=\frac{1}{2}\beta_{3l}A^2z\mathrm{e}^{-2qz+2\mathrm{j}(\omega t-k_x x)}\end{aligned}\right\}\tag{17.15.14}$$

这个结果表明，不是沿表面波传播的方向有积累，而是沿 z 方向有积累，关于这个问题的讨论见文献[13]。二阶表面被位移的最大值不是在表面，而是在

$$z_m=\frac{1}{2q}\tag{17.15.15}$$

数值计算表明，二阶谐波的“趋肤效应”比一阶波更强。

以上仅讨论了各向同性弹性固全中的非线性波，但二阶势函数的理论对于各向异性固体(如晶体等)同样能够应用，这是今后要进一步做的工作。

参 考 文 献

[1] Breazeal M A, Jacob P. Determination of third-order elastic constants from ultrasonic harmonic generation measurements. Physical Acoustics,1984 17: 2~60

[2] Marnaghan F D. Finite deformation of an elastic solid. New York: Wiley Dover, 1951
[3] Brugger K. Thermodynamic definition of high order elastic coefficients. Phys Rev, 1964, 133: A1611~A1162
[4] Green Jr R E. Ultrasonic investigation of mechanical properties. in treatise treatise on materials science and technology. Vol.3. New York: Academic Press, 1973
[5] Thuaston R N, Brugger K. Third-order elastic constants and velocity of small amplitude elastic waves in homogeneously stressed media. Phys Rev ,1964, 133:A 1604~A1610.
[6] Hughes D S, Kelly J L. Second-order elastic deformation of solids.Phys Rev, 1953, 92: 1145~1149
[7] Landua L D, Lifsitz E M. Theory of elasticity. Oxford:Pergamon,1956
[8] 王耀俊. 固体性能研究中的非线性超声波. 物理学进展, 1986, 6: 509~527
[9] Qian Z W. Equations of the second-order potentials of finite-amplitude waves in elastic solids. Journal of the Acoustical Society of America, 1989, 86: 1965~1967
[10] Birch F. Finite elastic strain of cubic crystals. Phys Rev, 1947, 71: 809~824
[11] 杜功焕. 晶体中纯纵模式的非线性声波传播理论. 中国科学, 1989,(3): 276~282
[12] Jiang W H, Du G H. Quasilongitudinal wave along *y*-direction of $LiNbO_3$ and its ultrasonic nonlinearity parameters. Science in China(Series A), 1991, 34: 346~353
[13] Qian Z W. Second-order harmonics of surface wave in isotropic solids. J Sound & Vib, 1995, 187: 369~379
[14] Qian Z W. Equations of the second-order potentials in bounded solid space – bulk and surface waves.J Sound & Vib, 1995, 186: 561~566
[15] Qian Z W. Nonlinear acoustics of bounded solid-reflection and refraction of second-order waves.I. P incidence. Science in China (Series A), 1994, 36: 1468~1478
[16] Qian Z W. Nonlinear acoustics of bounded solid-reflection and refraction of second – order waves .II. SV or SH incidence. Science in China (Series A), 1994, 37: 693~703
[17] Shui Y, Solodov I Y. Nonlinear reflection of bulk acoustic waves in solids. WESTPAC II 85,Hong Kong,1985, 188~192
[18] Shui Y, Solodov I Y. The acoustic nonlinearity of the solid interface, Proc China-Japan Joint Conference on Ultrasonics,Nanjing,1987. 191~194
[19] Wang R Q, et al. The least-square method to fit the acousto-elastic relation for calculation of elastic modules and stresses of materials. WESTPAC III 88,Shanghai, 1988, 203~206
[20] 钱祖文. 有界空间的非线性声学——横波入射与临界角响应. 中国科学(A 辑), 1997, 27: 757~762; Qian Z W. Nonlinear acoustics of bounded solid—transvers-wav eincidence and response in critical angle. Science in China(Series A), 1998, 41: 960~966
[21] Qian Z W, Jiang W H.Measurements of third-order elasticity in isotropic solids. Proc.16th International Congress on Acoustics and 135th Meeting Acoustical Society of America. 1998. Vol. III. 1727~1728

第 18 章　分形学在声学中的应用

1. 概述

按照欧几里得空间的维度的概念，有限维线性空间的基底数等于它的维数。平面空间的维数是 2，在此空间中的任何一个流形其拓扑维数 D_T 是大于等于零，小于等于 2 的整数，因此，一个点的维数是零，一条曲线的维数是 1。按照这样的理念，可以用一根长度为 l 的标尺去测量一条曲线的长度(用符号 L 来表示所测得的长度)时，则得到

$$nl = L \tag{18.0.1}$$

即曲线的长度正比于标尺的一次幂，或

$$L \propto l \tag{18.0.2}$$

n 是标尺从曲线的起点“步行”到终点时所跨行的步数(也许不是整数)。但当人们用不同长度的标尺去测量海岸线的长度时却得到不同的结果，用短标尺测量到的长度大于用长标尺测量到的长度，这个结果表明，海岸线的长度依赖于标尺的长短！于是人们就提出一个问题：这条海岸线究竟有多长？问题似乎出在(18.0.1)式与(18.0.2)式，那里认为曲线的维数是 1，因此，海岸线的维数也就是 1 了。也许我们会问，有没有一类连续曲线其维数大于 1？其答案是肯定的。

2. 科赫曲线[1~4]

如图 18.1 所示，E_0是长度为 1 的子集，E_1 是将长度 1 去掉中间的 1/3 之后，用一个边长为 1/3 的等边三角形去掉底边，将剩下的两腰去连接，这样有四段直线段组成了的子集 E_1。在每段直线上，继续进行上述操作可以得到 E_2 , E_3 ，直至 E_n，由此可以得到科赫(Von Koch)曲面(线)。显然，E_0 的长度为 1，E_1 的长度为 4/3，这表明，如果我们分别用长度为 1 和 1/3 的标尺去量科赫子集的长度，用后一个标尺量出来的长度比前者长 4/3 倍。图 18.2 是广义科赫分形曲线。

3. 三分康托集

如图 18.3 所示，E_0是长度为 1 的子集，E_1 是将长度 1 去掉中间的 1/3 之后剩下的两段组成的子集，E_2是将剩余的两段进行三分，然后进行去一留二的操作，按照

这样的操作过程重复进行下去，直至无限次我们得到的集合 E_n。

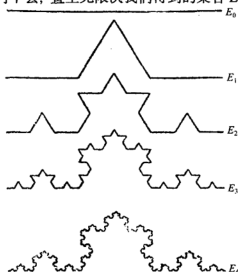


图 18.1　科赫分形曲线 (表面)

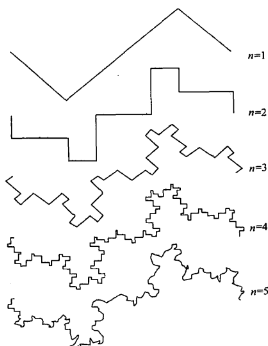


图 18.2　广义科赫分形曲线(表面)

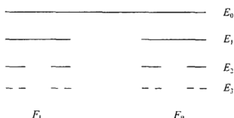


图 18.3　三分康托集

18.1　分　数　维

早期分形的定义是由 Mandelbrot 给出[1]，他认为分形集合的豪斯道夫维数 D 大于其拓扑维，即 $D>DT$，不过有人认为(见文献[2])这样的定义不合理，它会把那些人们认为应该属于分形的集合排除在外。当然，作为应用者，我们使用的对象肯定属于分形范畴，不会与严格定义有冲突。因此，如何完善地去定义分形集，看来有待于数学家去完成它。

1．豪斯道夫测度与维数[1, 2]

当维数为整数时，由勒贝格测度来度量集合的长度、面积和体积等可测量。但当维数不一定是整数时，则要将勒贝格测度推广为豪斯道夫测度。

设 U 是 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}_n$ 中的子集，其中任何两点之间的最大距离为 $|U|$，即 $|U|=\sup\{|x-y|:x,y\in U\}$。$\{U_i\}$ 为可数个集类，且 $0<|U_i|\leqslant\delta$，$F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$，则称 $\{U_i\}$ 为 F 的 δ 覆盖，现在我们来定义豪斯道夫测度。

设 F 为 $\mathbf{R}_n$ 中的子集，s 为非负整数，定义

$$H^s(F)=\lim_{\delta\to 0}H^s_\delta(F)=\lim_{\delta\to 0}\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}|U_i|^s:\{U_i\}\text{为}F\text{的}\delta\text{覆盖}\right\}\qquad(18.1.1)$$

为集合 F 的 s 维豪斯道夫测度。这个式子表明，为了“测量”集合 F，我们用维度为 s、“大小”为 $|U_i|<\delta\to 0$ 的许多“小区域”去覆盖它，取全部“小区域”的最低值(下确界)，即可得到 F 的测度。从定义来看，这些小区域的大小(不像容量维，小区域的大小相同)不要求相同，但要求不超过 δ，而且有 $\delta\to 0$。在 s 为整数 n 的情况下，除了差一个常数以外，它应与勒贝格测度一致。对于勒贝格测度而言，当标尺放大 λ 倍，则测度放大 λ^n 倍，即长度也放大 λ 倍，面积放大 λ^2 倍，体积放大 λ^3 倍……当维数不为整数时，其几何意义就不明显，但由豪斯道夫测度的定义可

以证明(见文献[2])

$$H^s(\lambda F)=\lambda^s H^s(F) \tag{18.1.2}$$

即豪斯道夫测度满足放大关系，即相似比例关系。上面的几个例子属于很容易用维豪斯道夫测度去求维数的情形，但在大多数情况下，并不那么简单。

2. 豪斯道夫维数

到目前为止，我们还没有找到确定维数 s 的方法。由(18.1.1)式可知，当 $|U_i|\leqslant\delta<1$ 时，测度 $H^s(F)$ 对 s 而言其测度至少是不增的。如果有维数 $s_1>s$，则有 $\sum_i|U_i|^{s_1}\leqslant\delta^{s_1-s}\sum_i|U_i|^s$ 或

$$H_\delta^{s_1}(F)\leqslant\delta^{s_1-s}H_\delta^s(F)$$

由此可见，随着 $\delta\to0, H_\delta^s(F)\to H^s(F)$ 为 F 的测度，因为 $H^s(F)$ 为有限值，由于 $s_1>s$，则随着 $\delta\to0$，$H^{s_1}(F)=0$；反之，若有维数 s_2 使 $s_2<s$，随着 $\delta\to0$，$H^{s_2}(F)=\infty$。这些结果表明，应当存在一个值 $s=\dim_H F=D$ 使测度 $H^s(F)$ 从 ∞ 突变为零，因而定义 D 为集合 F 的豪斯道夫维数，下面用启发式方法(Heuristic method)式来求三分康托集的维数，严格的算法请参考有关文献[2]。我们将图 18.3 中左边(F_L)和右边(F_R)的子集分别表示为

$$F_L=F\cap\left[0,\frac{1}{3}\right],\quad F_R=F\cap\left[\frac{2}{3},1\right]$$

比例系数 $\lambda=\frac{1}{3}$，由(18.1.1)式和(18.1.2)式可得

$$H^D(F)=H^D(F_L)+H^D(F_R)=H^D\left(\frac{1}{3}F\right)+H^D\left(\frac{1}{3}F\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^D H^D(F)+\left(\frac{1}{3}\right)^D H^D(F) \tag{18.1.3}$$

当 D 为豪斯道夫维数时，其测度为有限值(不等于零)，则可以得到

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^D=1,\quad D=\frac{\lg 2}{\lg 3}\approx0.6309 \tag{18.1.4}$$

即康托集的豪斯道夫维数近似为 0.6309。同理，对于科赫集，其比例是 1∶3，线段是 4，可得

$$4\left(\frac{1}{3}\right)^D=1,\qquad D=\frac{\lg 4}{\lg 3}\approx 1.2619 \tag{18.1.5}$$

4-2 康托集的比例是 1∶4，线段数是 2，故有

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^D=1,\qquad \mathrm{D}=\frac{\lg 2}{\lg 4}=0.5 \tag{18.1.6}$$

从这几个例子的结果可见，如果线段数为 m，标尺比例为 $1:n$，则其分维数可以写成

$$D=\frac{\lg m}{\lg n}=-\frac{\lg m}{\lg\left(\frac{1}{n}\right)} \tag{18.1.7}$$

这个结果与从所谓相似维、容量维等的定义出发计算得到的结果完全相同。这是因为所讨论的集合都是自相似的，即从该集合的任一个局部按比例放大之后就可以得到全貌(自相似性)。

18.2　分形表面的散射[5]

海面对声波的散射构成了水下混响，它对声呐探测形成干扰，因此对海面散射的研究成为一个重要课题。20 世纪五六十年代，国外同行总结大量的实验数据并得到下述经验公式[6, 7]

$$S_s=10\log(fh\sin\vartheta)^{2D}-45 \tag{18.2.1}$$

式中，S_s, f 和 h 分别为海面的散射强度(以分贝计)、声波频率和海面波浪峰到谷的高度，ϑ 为声波传播方向与海平面所张的掠角，$2D$ 为非常接近于 1 的数值(如 0.99)。在 $4<fh\sin\vartheta<200$ 时，(18.2.1)式以 5dB 的标准偏差与大量的实验数据符合。所有的不平表面(连续可微表面)散射理论[8~11]不能够解释(18.2.1)式所得到的结果。

在研究表面散射时，人们总是将表面当作一条曲线，如正弦曲线，而将另一维尺度看成是常数，即将散射表面看成是一块石棉瓦的形状。对于分形表面而言，我们同样将海面看成是广义 Koch 曲线，而将另一维测度当作常数，它们构成的分形曲面称为广义 Koch 曲面，而广义 Koch 曲线按下列过程产生[5]：

$$\left.\begin{aligned} &n=0,\ a^{(0)}=1 \\ n=1,\ a_1^{(1)}=\frac{1}{2\sqrt{2}},\ a_2^{(1)}&=\frac{1}{\sqrt{2}},\ a_3^{(1)}=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &n=2,\ \cdots \end{aligned}\right\} \tag{18.2.2}$$

见图 18.2。按照豪斯道夫测度理论，其测度满足下述公式，即

$$2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^D+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^D=1 \tag{18.2.3}$$

式中，D 为该分形曲线的维度，它等于 1.524。为了研究海面波浪的散射问题，我们用下述分形集来近似描写它，即

$$\left.\begin{aligned} &n=0,\ a^{(0)}=\Lambda_0 \\ n=1,\ a_1^{(1)}=\frac{\Lambda_0}{4}\sqrt{1+(\frac{4A_0}{\Lambda_0})^2},\ a_2^{(1)}&=2a_1^{(1)},\ a_3^{(1)}=\ a_1^{(1)} \\ &n=2,\ \cdots \end{aligned}\right\} \tag{18.2.4}$$

该分形集的测度满足

$$(2^{1-D}+1)[a_2^{(1)}]^D=1 \tag{18.2.5}$$

式中，D 为该分形的维度。通过数值计算得到 D 与 α 的关系，而

$$\alpha=\frac{4A_0}{\Lambda_0}=\cot\left(\frac{\Theta}{2}\right) \tag{18.2.6}$$

计算结果见表 18.1。

表 18.1 广义科赫曲线的维度与 α 的关系

α	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.3	1.4
D	1.08	1.13	1.15	1.3	1.5	1.74	2.0	2.13

由于曲线的维度应当满足 $1\leqslant D<2$，由(18.2.6)式可知，α 应当小于 1.3，即波浪的高度 A_0 与海浪波长 Λ_0 的关系应当满足

$$A_0<0.325\,\Lambda_0 \tag{18.2.7}$$

在理想的情况下，即用大尺度的标度来观察海面，可以近似认为海浪是光滑的正弦曲面(线)，但如果我们用声波波长 λ 的尺度($\lambda < \Lambda_0$, A_0)来观察海面，它是起伏不平而可以近似地用分形表面(曲线)来描述。从前面关于分形的性质可知，在这类曲线上是处处不可微，也就是说，每个分形子集的拐角处，曲线有突变(或间断)，对于这样一类表面的散射问题可以应用 Freedman 理论来处理。按照 Freedman 理论[12]，如果界面对波源所张的指向性加权立体角 W 在某处有 n 阶突变，这一突变就要产生散射，对于一阶突变，其散射波可表示为

$$P = \int_S \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} \mathrm{e}^{2\mathrm{j}kr} \mathrm{d}r \tag{18.2.8}$$

式中，S 为具有突变的表面(曲线)。现在计算分形子集 S_n 所产生的散射，即

$$P_n = \int_{S_n} \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} \mathrm{e}^{2\mathrm{j}kr} \mathrm{d}r \tag{18.2.9}$$

显然，W 在图 18.2 的每个拐角点处有突变，它可表示为

$$W(r) = W(r_m) H(r_m - r) \tag{18.2.10}$$

式中，$H(x)$为 Heaviside 阶跃函数，r_m 为突变点的坐标。将(18.2.10)式代入(18.2.9)式得到

$$P_n = \int_{S_n} W(r_m)\delta(r - r_m)\mathrm{e}^{2\mathrm{j}kr}\mathrm{d}r = \sum_m W(r_m)\mathrm{e}^{2\mathrm{j}kr_m} \tag{18.2.11}$$

或用它的强度表示

$$|P_n|^2 = I_n = \sum_m |W(r_m)|^2 + \sum_m \sum_{l \neq m} W(r_m)W(r_l)\mathrm{e}^{2\mathrm{j}k(r_m - r_l)} \tag{18.2.12}$$

式中，第一项为非相干项，第二项为相干项，在远处前者为主要贡献项，故有

$$I_n \approx \sum_m |W(r_m)|^2 \tag{18.2.13}$$

当 $n \to \infty$， $I_n = I$，分形子集 S_n 成为分形曲面(线)S，这时原本分离的 r_m 在 S 上几乎成为连续的，故可将求和用积分来表示，即

$$I = \int_S \mathrm{d}|W(s)|^2 \tag{18.2.14}$$

由于分形曲线上处处不可求微分，因而在它上面的间断点的数目正比于其弧元的长度 ds，按照 Hölder 条件下的 Lipshitz 变换的性质可知[1, 2]，$|W(s)|$ 的维度等于曲面(线)的维度 D，于是广义科赫曲面(线)所产生的散射强度是

$$I = A|W|^{2D} \tag{18.2.15}$$

下面计算 W 在拐角点的变化。作图 18.4，它相当于在分形集中取 n=1 的分形子集(三角波形 $ACDB$)，设 CF 是平面波的波阵面，$\boldsymbol{k}$ 是波矢量，它表示波传播的方向。当表面 CD 过渡到表面 DB 时，其加权立体角 W 发生突变。很容易算出

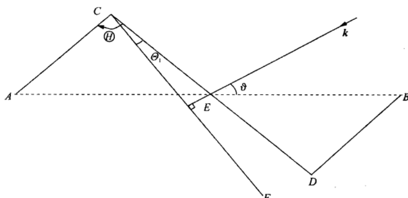


图 18.4 科赫表面散射

$$\left.\begin{aligned} L_{CE}\cos\vartheta_1 &= \frac{A_0}{\cos(\Theta/2)}\cos\left(\frac{\Theta}{2}-\vartheta\right) \\ L_{DB}\cos(\vartheta_1-\Theta) &= \frac{A_0}{\cos(\Theta/2)}\cos\left(\frac{\Theta}{2}+\vartheta\right) \end{aligned}\right\} \tag{18.2.16}$$

式中，L_{CE} 和 L_{DB} 分别为所示两点之间的距离。由此可见，绕过拐角点 D 之后 W 的变化正比于

$$L_{CE}\cos\vartheta_1 - L_{DB}\cos(\vartheta_1-\Theta) = 2A_0\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right)\sin\vartheta \tag{18.2.17}$$

如果我们用波长的尺度去观察它，则用波长去除这个距离，使之量纲为一化，于是有

$$W \propto \frac{2A_0}{\lambda}\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right)\sin\vartheta \propto hf\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right)\sin\vartheta \tag{18.2.18}$$

将这个式子代入(18.2.15)式，并将所得结果用分贝表示，于是有

$$S_s = S_s^{(0)} + 10\log\left[fh\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right)\sin\vartheta\right]^{2D} \tag{18.2.19}$$

如果 $\Theta \approx \pi/2$，$S_s^{(0)} = -45$，$D \approx 0.5$，则(18.2.19)式就非常接近于(18.2.1)式，这就说明水下声混响不是由光滑表面的散射所产生的，而是由分形(处处不可微)表面(其维度接近于 0.5)所贡献的。为了理解这个结果，我们需要做进一步的分析。从上面的结果可知，广义 Koch 曲线的维度总是大于 1 的，为何这里的 D 会接近于 0.5?

由图 18.4 很容易看出，当波矢量几乎对着表面 CD 时，另外两个表面 AC 和 DB 则几乎与波矢量平行(因为 $\Theta \approx \pi/2$)，于是后两者所产生的散射很小，散射的主要贡献者是前者；另外，当波矢量几乎对着表面 AC 和 DB 时，表面 CD 的贡献可以忽略。由此可见，在波传播的情况下，广义科赫曲面(线)退化为两组分离的 4-2 康托集(图 18.5)。这个结果表明，根据水下混响数据，分形学理论给出海面的分维度接近于 0.5；另外，利用光学方法遥测海面也得到海面的分维度为 0.5(见文献[18])

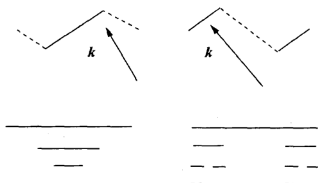


图 18.5 4-2 康托集

18.3 形状不规则颗粒构成的介质中的声传播[14~17]

在处理颗粒介质中的声传播时，在 $kR<<1$ 的情况下，或者说我们用声波波长的尺度去观察颗粒时，由于波长远大于颗粒的半径，总是将颗粒看成是球形。由这一模型出发，人们计算了这类介质中的声衰减。但当我们将理论结果与测量数据进行比较时发现，理论计算的结果低于实验数据(见文献[14])。

众所周知，在水声频段，浓颗粒介质的声衰减主要由于黏滞摩擦，颗粒周围的流体相对于颗粒做相对运动，在流体中产生黏滞波，其波长为 λ_v 而

$$\lambda_v = 2\sqrt{\frac{\pi\eta}{f\rho}} \tag{18.3.1}$$

式中，η，ρ 和 f 分别为流体的黏滞系数、密度和声波频率。如果 f 在 0.1~1mHz，则水中的 λ_v 在 $10^{-4} \sim 10^{-3}$ cm，这正是自然界砂颗粒的大小范围，这时我们用黏滞波长度尺度去观察颗粒，不仅不能将其整体形状当成是球形的，而且其表面是坑坑洼洼的，黏滞摩擦与颗粒表面的光滑程度很有关系。

现在我们来计算颗粒介质中黏滞摩擦所消耗的功率，即耗散函数

$$W = -\oint\left\{\rho_0 \boldsymbol{V}\left(\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho_0}\right)-(\boldsymbol{V}\cdot\ddot{\sigma})\right\}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} - \int\sigma_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}\tau$$

式中，$\boldsymbol{V}=(v_1, v_2, v_3)$ 为立体质点速度，在无穷远处为零，$\ddot{\sigma}=\{\sigma_{ik}\}$ 为黏滞应力张量，p 为压力，ρ_0 为流体密度。由于无限远处没有扰动，如果积分是在整个空间进行，则面积分部分为零，故有

$$W = -\int\sigma_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}\tau = -\eta\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}\tau$$

上式的积分实际上是在每个粒子的边界层内进行积分，故可以写成

$$W = -\int\sigma_{ik}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)d\tau = -\eta\sum_n\int\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}\tau_n \tag{18.3.2}$$

这个结果表明，先在第 n 个粒子的边界层内积分，然后将所得结果对所有粒子的耗散函数求和。故(18.3.2)式可以进一步写成

$$W = -\left\{\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2\right]_{\tau_n}\right\}_n \sum_n \tau_n \tag{18.3.3}$$

式中，$[X]_{\tau_n}$ 和 $\{Y\}_n$ 分别为所论宗量对 τ_n 和 n 先后求平均。

另外，由于颗粒介质的声衰减 α 正比于耗散函数，故有

$$\alpha \propto -W \propto -\sum_n \tau_n \tag{18.3.4}$$

而 τ_n 是第 n 个粒子边界层的体积。对于光滑球体 τ_n 正比于特征长度 R 的三次方，即其维数是 D_0，即

$$\sum_n \tau_n \propto \left[\frac{\bar{R}_n}{\lambda_v}\right]^{D_0} \propto (\beta R)^{D_0} \tag{18.3.5}$$

式中，$\bar{R}_n$ 为粒子的分布平均大小，用 R 表示。另外，如果用黏滞波波长的尺度去观察粗糙颗粒时，它具有分形结构，其维数为 D，而

$$\sum_n \tau_n \propto \left[\frac{\bar{R}_n}{\lambda_v}\right]^{D} \propto (\beta R)^{D} \tag{18.3.6}$$

由此可得，粗糙粒子引起的声衰减 α 与光滑球形粒子所产生的声衰减 α_0 之间的关系可表示为[15]

$$\alpha = \alpha_0 (\beta R)^{D-D_0} \tag{18.3.7}$$

根据分形学理论可知，$D>D_0$，粗糙粒子构成的介质引起的声衰减 α 大于光滑球形粒子构成的介质所产生的声衰减。这个结论在实验中得到证实[14,16]。

参 考 文 献

[1] Mandelbrot B B. Fractal geometry of nature. New York：Freeman, 1982

[2] Falconer K J. Fractal geometry. New York：Wiley, 1990

[3] Schroeder M. Fractals, chaos, power laws. New York : W H Freeman and Company, 1991

[4] Milosevic N T, Ristanovic D. Fractal and nonfractal properties of triadic Koch curve. Chaos Soliton & Fractals, 2007, 34: 1050~1059

[5] Qian Z W. Wave scattering on a fractal surface. J Acoust Soc Am, 2000, 107: 260~262

[6] Schulkin M, Shaffer R. Backscattering of sound from the sea surface. J Acoust Soc Am, 1964, 36: 1699~1703

[7] Urick R J. Princple of underwater sound. 3rded. New York: McGraw-Gill, 1983

[8] Eckart C. The scattering of sound from the sea surface. J Acoust Soc Am, 1953, 25: 566~570

[9] Marsh H W. Exact solution of wave scattering by irregular surface. J Acoust Soc Am, 1961, 33: 330~333

[10] Beckman P, Spizzichino A. The scattering of electromagnetic waves from rough surface. New York：Macmillan, 1963

[11] Jakeman E. Scattering by a corrugated random surface with fractal slope. J Phys A , 1982, 12: L55~L59

[12] Freedman B B. A mechanism of acoustic echo formation. Acustica, 1962, 12: 10~21

[13] Lyamshev L M. On the fractal nature of sea surface reverberation. Acoustical Physics, 2001, 47: 283~285

[14] Wu D, Qian Z W, Shao D. Sound attenuation in a coarse granular medium. J Sound and Vibration, 1993, 16：529~535

[15] Qian Z W. Fractal dimensions of sediments in nature. Physical Rev E , 1996, 53: 2304~2306

[16] Wang Q, Attenborough K, Woodhead S. Particle irregularity and aggregation effects in airborne suspensions at audio-and low ultrasonic frequencies. J Sound and Vibration, 2000, 236: 781~800

[17] Qian Z W. Some applications of fractals to acoustics. Current Topics in Acoustical Research, 2003, 3: 101~107

[18] Zaslavskii G M, Sharkov. Fractal properties of breaking zones of sea surface waves. Sov Phys Dokl, 1987, 32: 499~501